EWMS

Sommersemester 2020, FSU Jena

Prof. B. Schmalfuß
Dr. R. Hesse

Ausgabetermin:	18.05.2020
Abgabetermin:	25.05.2020

2. Übungsblatt

Aufgabe 1. Gegeben seien die Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbf{P}(A) = 0{,}5; \quad \mathbf{P}(B) = 0{,}25; \quad \mathbf{P}(C) = 0{,}15; \quad \mathbf{P}(A \cap B) = 0{,}125;$$
$$\mathbf{P}(A \cap C) = 0{,}06; \quad \mathbf{P}(B \cap C) = 0{,}075; \quad \mathbf{P}(A \cap B \cap C) = 0{,}03.$$

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse

a) $A \setminus C$,

b) $A \cup B \cup C^c$,

c) $A^c \cap B^c \cap C$,

d) $(A^c \cap B^c) \cup C$.

Aufgabe 2. Im 17. Jahrhundert überlegte sich De Méré, dass es beim Wurf mit drei nicht unterscheidbaren fairen Würfeln genau sechs Möglichkeiten gibt, die Augensumme 11 bzw. 12 zu erzielen. Hieraus folgerte er, beide Ereignisse hätten die gleiche Wahrscheinlichkeit, fand dies aber in der Praxis nicht bestätigt. Worin bestand sein Trugschluss? Geben Sie für das obige Experiment einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum an und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für die beiden Ereignisse.

Aufgabe 3. Sei X eine diskrete Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}$ und $0 < \mathbf{P}(X = k) < 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Man zeige: X ist genau dann Geo(p)–verteilt mit Parameter $p \in (0,1)$, falls für X die *Gedächtnislosigkeit* gilt, d.h.

$$\mathbf{P}(X > j + k \mid X > k) = \mathbf{P}(X > j), \qquad j, k \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

a) Zeigen Sie für drei Ereignisse $A, B, C \in \mathcal{A}$, dass

$$\mathbf{P}(A \cup B \cup C) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A \cap C) - \mathbf{P}(B \cap C) + \mathbf{P}(A \cap B \cap C).$$

b) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A_i \in \mathcal{A}$, $1 \leq i \leq n$. Beweisen Sie, dass dann gilt:

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} \left[(-1)^{k+1} \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq n} \mathbf{P}(A_{j_1} \cap \ldots \cap A_{j_k})\right].$$

Aufgabe 5 (3 Punkte)**.** Von drei Maschinen gleichen Typs werden von der ersten 20%, von der zweiten 30% und von der dritten 50% der Gesamtproduktion hergestellt. Erfahrungsgemäß entstehen bei der ersten Maschine 5%, bei der zweiten 4% und bei der dritten 2% fehlerhafte Produkte.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein der Gesamtproduktion zufällig entnommenes Teil fehlerhaft?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig gefundenes fehlerhaftes Produkt von der zweiten Maschine gefertigt wurde?

c) Um die Qualität zu verbessern, soll die erste Maschine gegen eine neue Maschine mit gleicher Produktionskapazität ausgetauscht werden. Welche Fehlerquote darf die neue Maschine höchstens haben, damit die Gesamtfehlerwahrscheinlichkeit 2,5% nicht übersteigt?

Aufgabe 6 (5 Punkte)**.** Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

a) Es seien $A, B \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) A und B sind unabhängig.

(ii) A^c und B sind unabhängig.

(iii) A^c und B^c sind unabhängig.

b) Sie werfen einen weißen und einen schwarzen Würfel. Beide seien fair. Betrachten Sie folgende drei Ereignisse:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{\text{Der weiße Würfel zeigt 5 oder 6}\}, \\ A_2 &= \{\text{Die Augensumme ist durch 3 teilbar}\}, \\ A_3 &= \{\text{Die Augensumme ist durch 4 teilbar}\}. \end{aligned}$$

Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ an und entscheiden Sie, ob die Ereignisse A_1, A_2, A_3 vollständig unabhängig sind.

c) Es sei ein Ereignis $A \in \mathcal{A}$ gegeben, welches zu jedem Ereignis $B \in \mathcal{A}$ unabhängig ist. Was gilt dann für $\mathbf{P}(A)$?

d) Die Ereignisse $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$, seien (vollständig) unabhängig, d.h. für jede endliche Teilmenge $I \subseteq \mathbb{N}$ gilt.

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \prod_{i\in I} \mathbf{P}(A_i).$$

Zeigen Sie

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \prod_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i).$$

Abgabetermin: Die mit ☗ gekennzeichneten Aufgaben sind zu bearbeiten und bis 12 Uhr des Abgabetages per Mail abzugeben. Es wird empfohlen auch die übrigen Aufgaben zu lösen.

Mailadresse: robert.hesse@uni-jena.de

Bedingungen für die Teilnahme an der Klausur: 50% der Punkte aus den Übungsserien.