EWMS

Sommersemester 2020, FSU Jena

Prof. B. Schmalfuß
Dr. R. Hesse

Ausgabetermin:	02.06.2020
Abgabetermin:	09.06.2020

3. Übungsblatt

Aufgabe 1. In einer Geldbörse befinden sich N Münzen, dabei ist N Poisson–verteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Jede Münze wird einmal geworfen und zeigt mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0,1)$ Kopf. Zeigen Sie, dass die Gesamtanzahl von Münzen, die Kopf zeigen, Poisson–verteilt ist mit Parameter λp.

Aufgabe 2. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen Bernoulli–Zufallsvariablen zum Parameter $p = \frac{1}{2}$. Zeigen Sie, dass dann

$$U := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{2^n}$$

gleichverteilt auf $[0,1]$ ist.

Hinweis: Die Unabhängigkeit von Zufallsvariablen wird in der nächsten Vorlesung eingeführt. Für diese Aufgabe genügt es vorauszusetzen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathbf{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i = a_i\}\Big) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(X_i = a_i), \qquad a_i \in \{0,1\}\,, i = 1, \ldots n.$$

Aufgabe 3. Ein Flugzeug bekommt für einen Linienflug einen Höhenkorridor im Bereich von $4300m$ bis $4400m$ vorgeschrieben. Bei Erreichen einer Höhe von $4350m$ wird das Flugzeug auf Autopilot umgestellt. Zu einem festen Zeitpunkt sei dann die tatsächliche Höhe eine normalverteilte Zufallsvariable mit $\mu = 4350m$ und $\sigma^2 = 400m^2$.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zu diesem Zeitpunkt der Flug im Korridor verläuft.

b) In welcher Höhe müsste der Autopilot angestellt werden, damit die Wahrscheinlichkeit für das Unterfliegen des Korridors 0.005 beträgt?

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** In einem See befindet sich eine unbekannte Anzahl an Fischen. Man entnehme dem See zufällig 20 Fische, markiere diese und setze sie danach wieder in den See. Nach einiger Zeit entnehme man wiederum zufällig 50 Fische. Von diesen 50 Fischen sind 4 markiert.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für diese Beobachtung, vorausgesetzt im Teich befinden sich insgesamt 100, 200, 300 bzw. 400 Fische?

b) Bei welcher Anzahl von Fischen im Teich wird die Wahrscheinlichkeit des beobachteten Ereignisses maximal?

Aufgabe 5 (4 Punkte)**.** Sei X eine absolutstetige Zufallsvariable mit Dichtefunktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} c\,|x|e^{-x}, & \text{für } -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie den Parameter $c \in \mathbb{R}$, sodass f tatsächlich eine Dichtefunktion ist.

b) Geben Sie die zugehörige Verteilungsfunktion an.

c) Ermitteln Sie $\mathbf{P}(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2})$ und $\mathbf{P}(X = 0)$.

d) Bestimmen Sie $x \in \mathbb{R}$, sodass gilt $\mathbf{P}(X \leq x) = \frac{3}{4}$.

☗ **Aufgabe 6** (4 Punkte)**.** Sei X exponentialverteilt zum Parameter $\lambda > 0$ und Y standardnormalverteilt. Bestimmen Sie die Dichtefunktionen von

a) $X_1 := \sqrt{X}$,

b) $X_2 := e^{-X}$,

c) $Y_1 := e^{Y}$ und

d) $Y_2 := Y^2$.

Abgabetermin: Die mit ☗ gekennzeichneten Aufgaben sind zu bearbeiten und bis 12 Uhr des Abgabetages per Mail abzugeben. Es wird empfohlen auch die übrigen Aufgaben zu lösen.

Mailadresse: robert.hesse@uni-jena.de

Bedingungen für die Teilnahme an der Klausur: 50% der Punkte aus den Übungsserien.