EWMS

Sommersemester 2020, FSU Jena

Prof. B. Schmalfuß
Dr. R. Hesse

Ausgabetermin:	15.06.2020
Abgabetermin:	22.06.2020

4. Übungsblatt

Aufgabe 1.

a) Die diskrete Zufallsvariable X nehme Werte in $\mathbb{N}_0$ an. Beweisen Sie folgende Gleichung

$$\mathbb{E}X = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(X > n).$$

b) Sei X geometrisch verteilt zum Parameter $p \in (0,1)$. Bestimmen Sie $\mathbb{E}X$.

c) Für $\lambda > 0$ sei eine Zufallsvariable X gegeben durch die Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\lambda}} & \text{, für } x > 0, \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

Aufgabe 2. Es sei X eine Zufallsvariable, welche nur Werte im Intervall $[b,c]$ annimmt. Zeigen Sie, dass

a) $\mathrm{Var}X \leq \frac{1}{4} \cdot (c-b)^2$,

b) $\mathrm{Var}X = \frac{1}{4} \cdot (c-b)^2 \Leftrightarrow \mathbf{P}(X = b) = \mathbf{P}(X = c) = \frac{1}{2}$.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst für alle $a \in \mathbb{R}$, dass $\mathrm{Var}X = \mathbb{E}\,(X-a)^2 - \big[\mathbb{E}\big(X-a\big)\big]^2$.

Aufgabe 3. In einem Krankenhaus werden n Babys in einer bestimmten Woche geboren. Es soll davon ausgegangen werden, dass sich darunter keine Zwillinge befinden, die Wahrscheinlichkeit für die Geburt eines Mädchens oder eines Junges jeweils $\frac{1}{2}$ ist und dass diese Ereignisse unabhängig voneinander sind. Mit b_n soll die Wahrscheinlichkeit bezeichnet werden, dass mindestens 60% der Neugeborenen Mädchen sind.

a) Berechnen Sie b_{10}.

b) Beweisen Sie mittels der Chebyshev-Ungleichung, dass $b_{100} < b_{10}$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Bestimmen Sie die wahrscheinlichkeitsgenerierende und die momenterzeugende Funktion der folgenden Zufallsvariablen und leiten Sie daraus deren Erwartungswert und Varianz her.

a) X sei Poisson-verteilt zum Parameter $\lambda > 0$.

b) Y sei exponentialverteilt zum Parameter $\lambda > 0$.

Aufgabe 5 (3 Punkte)**.** Eine zufällige Permutation σ der Zahlen $\{1, ..., n\}$ besitzt möglicherweise Fixpunkte $i \in \{1, ..., n\}$ für die gilt $\sigma(i) = i$. Sei $X = X(\sigma)$ die Anzahl der Fixpunkte der zufälligen Permutation σ. Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz von X.

Hinweis: Die Permutationen werden gemäß der klassischen Wahrscheinlichkeit zufällig ausgewählt. Die Verteilung von X zu bestimmen ist wesentlich schwieriger als diese Aufgabe.

Aufgabe 6 (5 Punkte)**.**

a) Sei X geometrisch verteilt zum Parameter $p \in (0,1)$. Zeigen Sie

$$\mathbb{E}\Big(\frac{1}{X}\Big) = \frac{p}{1-p}\log\frac{1}{p}.$$

Hinweis: $\frac{1}{n}q^n = \int_0^q x^{n-1}\,dx$ für $n \geq 1$.

b) Sei X eine Zufallsvariable gegeben durch die Verteilungsfunktion

$$F_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{\lambda t}, & t < 0, \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-\lambda t}, & t \geq 0, \end{cases}$$

für ein festes $\lambda > 0$. Bestimmen Sie $\mathbb{E}[3X-2]$ und $\mathrm{Var}(3X-2)$.

Abgabetermin: Die mit ☗ gekennzeichneten Aufgaben sind zu bearbeiten und bis 12 Uhr des Abgabetages per Mail abzugeben. Es wird empfohlen auch die übrigen Aufgaben zu lösen.

Mailadresse: robert.hesse@uni-jena.de

Bedingungen für die Teilnahme an der Klausur: 50% der Punkte aus den Übungsserien.