EWMS

Sommersemester 2020, FSU Jena

Prof. B. Schmalfuß
Dr. R. Hesse

Ausgabetermin:	29.06.2020
Abgabetermin:	06.07.2020

5. Übungsblatt

Aufgabe 1. Wir addieren 10^4 reelle Zahlen, die mit einer Genauigkeit von 10^{-m}, $m \geq 1$, gerundet werden. Wir nehmen an, dass die einzelnen Rundungsfehler unabhängig sind und gleichmäßig auf dem Intervall $[-\frac{10^{-m}}{2}, \frac{10^{-m}}{2}]$ verteilt. Bestimmen Sie mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes das Intervall, das den Gesamtfehler mit Wahrscheinlichkeit 0.99 enthält.

Aufgabe 2. Sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von *iid* Zufallsvariablen gegeben durch die Dichte

$$f_{X_1}(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}.$$

Bestimmen Sie die Verteilung von $\frac{X_1+X_2}{2}$ und folgern Sie für $n \in \mathbb{N}$ die Verteilung von $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Hinweis: Zur Lösung des auftauchenden Integrals bietet sich eine Partialbruchzerlegung an.

Aufgabe 3. Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Zufallsvariablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ mit $\mathbf{P}-\lim_{n\to\infty} X_n = X_0$ und $\mathbf{P}-\lim_{n\to\infty} Y_n = Y_0$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

(i) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in Verteilung gegen X_0,

(ii) $\mathbf{P}-\lim_{n\to\infty}(X_n + Y_n) = X_0 + Y_0$,

(iii) $\mathbf{P}-\lim_{n\to\infty}(X_n \cdot Y_n) = X_0 \cdot Y_0$,

(iv) falls $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist, so folgt $\mathbf{P}-\lim_{n\to\infty} f(X_n) = f(X_0)$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Ein fairer Würfel werde n-mal geworfen. Es bezeichne X_j das Ergebnis des j-ten Wurfes. Weiterhin sei

$$Y_j := \begin{cases} 1, & X_j < 3, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases} \qquad Z_j := \begin{cases} 1, & X_j < X_{j+1}, \\ 0, & \text{sonst}. \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Grenzwerte in Wahrscheinlichkeit von $\big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_j\big)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j\big)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n \to \infty$.

Aufgabe 5 (4 Punkte)**.**

Ein Grashüpfer startet am Ursprung der Zahlengerade und hüpft bei jedem Sprung mit Wahrscheinlichkeit $p = 0.6$ um zwei Einheiten in die positive Richtung und mit Wahrscheinlichkeit $1 - p = 0.4$ um eine Einheit in die negative Richtung. Bestimmen Sie mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, dass das Tier nach 10000 Sprüngen im Bereich $[7700, 8100]$ landet.

⬆ **Aufgabe 6** (4 Punkte)**.** Seien (X, Y) die Koordinaten eines Punktes, der zufällig gleichverteilt aus dem Kreis $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$ ausgewählt wird, d.h. der Zufallsvektor (X, Y) habe die Dichte

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & (x, y) \in K, \\ 0, & \text{sonst}. \end{cases}$$

a) Berechnen Sie die Randverteilung von X und Y.

b) Sind X und Y unabhängig?

c) Berechnen Sie $\mathbb{E}X$ und $\mathrm{Var}X$.

d) Bestimmen Sie $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Abgabetermin: Die mit ⬆ gekennzeichneten Aufgaben sind zu bearbeiten und bis 12 Uhr des Abgabetages per Mail abzugeben. Es wird empfohlen auch die übrigen Aufgaben zu lösen.

Mailadresse: robert.hesse@uni-jena.de

Bedingungen für die Teilnahme an der Klausur: 50% der Punkte aus den Übungsserien.