Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Sommersemester 2020
FSU Jena

Prof. Schmalfuß
Stefan Engelhardt

Hinweise und Musterlösung 1. Übungsblatt

Hinweise

Aufgabe 1. a) Siebformel

b) Definition überprüfen

c) Zerlege B in disjunkte Mengen

Aufgabe 2. a) totale Wkt

b) Definition bedingte Wkt umstellen

Aufgabe 3. Transformation von ZV über die Verteilungsfunktion, dann ableiten. Integral für EW nur hinschreiben und nicht explizit ausrechnen.

Aufgabe 4. Summe von unabhängigen Normalverteilung ist wie verteilt?

Aufgabe 5. a) Definition

b) Siebformel

c) Vllt von beiden Enden aus anfangen.

d) Siebformel

Aufgabe 6. a) Definition überprüfen

b) Definition anwenden

c) Transformation von ZV

Musterlösungen

Aufgabe 1. a) Nach der Siebformel ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A\cap B) &= \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cup B) = 0.6+0.5-0.8 = 0.3,\\
\mathbb{P}(A\cap C) &= \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(C)-\mathbb{P}(A\cup C) = 0.6+0.3-0.7 = 0.2,\\
\mathbb{P}(B\cap C) &= \mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(C)-\mathbb{P}(B\cup C) = 0.5+0.3-0.65 = 0.15,\\
\mathbb{P}(A\cap B\cap C) &= -(\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(C)-\mathbb{P}(A\cup B)-\mathbb{P}(A\cup C)-\mathbb{P}(B\cap C))+\mathbb{P}(A\cap B\cap C)\\
&= -(0.6+0.5+0.3-0.8-0.7-0.65)+0.9 = 0.15,
\end{aligned}$$

b) Da $\mathbb{P}(A\cap C) = 0.2 \neq 0.18 = 0.6\cdot 0.3 = \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(C)$ sind A, B, C nicht unabhängig. Aber $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)$ und $\mathbb{P}(B\cap C) = \mathbb{P}(B)\cdot\mathbb{P}(C)$, weswegen A und B sowie B und C unabhängig sind.
Da $\mathbb{P}(A\cap B) = 0.3$, $\mathbb{P}(A\cap C) = 0.2$, $\mathbb{P}(B\cap C) = 0.15$ folgt, dass keiner der Schnitte leer sein kann. Die Mengen sind also nicht disjunkt.

c) $\mathbb{P}(A^c\cup B) = \mathbb{P}(A^c)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(B\setminus A) = 1-\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(A\cap B) = 1-0.6+0.3 = 0.7.$

Aufgabe 2. Wir definieren die Ereignisse $Z =$„Störung Zundanlage", $K =$„Fehler Kraftstoffzufuhr", $S =$„sonstige Störung" und $H =$„kann helfen". Es ist gegeben, dass $\mathbb{P}(Z) = 0.5$, $\mathbb{P}(K) = 0.3$, $\mathbb{P}(S) = 0.2$ und $\mathbb{P}(H|Z) = 0.5$, $\mathbb{P}(H|K) = 0.3$, $\mathbb{P}(H|S) = 0.05$.

a) Mit dem Satz der totalen Wkt oder über die Definition von bedingten Wkt erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(H) &= \mathbb{P}(H\cap Z)+\mathbb{P}(H\cap K)+\mathbb{P}(H\cap S)\\
&= \mathbb{P}(H|Z)\mathbb{P}(Z)+\mathbb{P}(H|K)\mathbb{P}(K)+\mathbb{P}(H|S)\mathbb{P}(S)\\
&= 0.5\cdot 0.5+0.3\cdot 0.3+0.2\cdot 0.05\\
&= 0.35.
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z^C|H^C) &= \frac{\mathbb{P}(Z^C\cap H^C)}{\mathbb{P}(H^C)} = \frac{1-\mathbb{P}(Z\cup H)}{\mathbb{P}(H^C)} = \frac{1-\mathbb{P}(Z)-\mathbb{P}(H)+\mathbb{P}(Z\cap H)}{\mathbb{P}(H^C)}\\
&= \frac{1-\mathbb{P}(Z)-\mathbb{P}(H)+\mathbb{P}(H|Z)\mathbb{P}(Z)}{1-\mathbb{P}(H)} = \frac{1-0.5-0.35+0.5\cdot 0.5}{1-0.35}\\
&= \frac{8}{13}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3. Da X exponentialverteilt zum Parameter $\lambda > 0$ ist, hat es die Verteilungsfunktion $F_X(x) = (1-e^{-\lambda x}))\mathbb{1}\{x \geq 0\}$. Wir erhalten

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(\frac{\log X}{\lambda} \leq y) = \mathbb{P}(X \leq e^{\lambda y}) = F_X(e^{\lambda y}) = (1-e^{-\lambda e^{\lambda y}})\mathbb{1}\{e^{\lambda y} \geq 0\} = 1-e^{-\lambda e^{\lambda y}}.$$

Da die Dichte die/eine Ableitung von F_Y ist, ist sie gegeben durch $f_Y(y) = \lambda^2 e^{\lambda y-\lambda e^{\lambda y}}$. Der Erwartungswert ist gegeben durch

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{\mathbb{R}} x f_Y(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} x\lambda^2 e^{\lambda x-\lambda e^{\lambda x}}\mathrm{d}x,$$

was sich leider nicht weiter vereinfachen lässt. (Aufgabe von mir schlecht gestellt)

Aufgabe 4. Die Summe von unabhängigen normalverteilten Zufallsvariablen ist wieder normalverteilt. Wenn wir die Breite des entsprechenden Brettes mit X_i bezeichnen, erhalten wir im Detail, dass $X = X_1 + \ldots + X_{10} \sim \mathcal{N}(10 \cdot 20, 10 \cdot 0.5^2) = \mathcal{N}(200, 2.5)$. Somit können wir die Tabelle für die Standardnormalverteilung heranziehen und erhalten

$$\mathbb{P}(195 \leq X \leq 210) = \mathbb{P}\left(-\frac{5}{\sqrt{2.5}} \leq \frac{X - \mathbb{E}[X]}{\sqrt{\mathrm{Var} X}} \leq \frac{10}{\sqrt{2.5}}\right) \approx \Phi(6.32) - \Phi(-3.16) \approx 0.9992$$

Aufgabe 5.

a) Weil sonst $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) = 1.1 > 1$ wäre.

b) $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = 0.5 \cdot 0.4 \cdot 0.2 = 0.04$ und

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B \cup C) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \\ &= 0.5 + 0.4 + 0.2 - 0.5 \cdot 0.4 - 0.5 \cdot 0.2 - 0.4 \cdot 0.2 + 0.04 \\ &= 0.76.\end{aligned}$$

c) $\mathbb{P}(A^c \cap B^c) = 1 - \mathbb{P}(A \cup B) = 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \cap B) = 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = (1 - \mathbb{P}(A))(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B^c)$

d)
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B \cup C) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B)\mathbb{P}(C) \\ &= 0.5 + 0.4 + 0.2 - 0.1 - 0.5 \cdot 0.2 - 0.4 \cdot 0.2 + 0.1 \cdot 0.2 \\ &= 0.84.\end{aligned}$$

Aufgabe 6. Die Zufallsvariable X habe die Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{4}x^2, & 0 \leq x \leq 2 \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

a) X ist absolut stetig, da $f_X(x) = \frac{x}{2}\mathbb{1}\{0 \leq x \leq 2\}$ eine Ableitung von F_X ist.

b) $IP(0.5 < X \leq 1.5) = F_X(1.5) - F_X(0.5) = \frac{2.25 - 0.25}{4} = 0.5$ und da X absolut stetig ist, folgt, dass auch $\mathbb{P}(0.5 \leq X < 1.5) = 0.5$, weil dann einzellne Punkte keine Masse haben.

c)
$$\begin{aligned}F_Y(y) &= \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(X^2 \leq y) = \mathbb{P}(|X| \leq \sqrt{y})\mathbb{1}\{y \geq 0\} \\ &= (F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}))\mathbb{1}\{y \geq 0\} = F_X(\sqrt{y})\mathbb{1}\{y \geq 0\} = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ y/4, & 0 \leq y \leq 4 \\ 1, & y > 4 \end{cases}\end{aligned}$$

Damit folgt außerdem, dass $f_Y(y) = \frac{1}{4}\mathbb{1}\{0 \leq y \leq 4\}$. Y ist also gleichverteilt auf dem Intervall $[0, 4]$. Da wir schon festgestellt haben, dass Y gleichverteilt ist, müssen diese Punkte erfüllt sein.

d) $\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x f_Y(x) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} x F_Y'(x) \mathrm{d}x = \int_0^2 x \frac{1}{2} x \mathrm{d}x = [\frac{1}{6}x^3]_0^2 = \frac{4}{3}$.