Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Sommersemester 2020
FSU Jena

Prof. Schmalfuß
Stefan Engelhardt

Hinweise und Musterlösung 2. Übungsblatt

Hinweise

Aufgabe 2. (a) Berechne $(a, b) \cdot P$ und Induktion.

(c) Für welches π gilt $\pi = \pi \cdot P$?

Aufgabe 3. a) Bildchen malen und von da aus arbeiten.

b) Welche Zustände erfüllen $\leftrightarrow$?

Aufgabe 4. (a) Bedingte Übergangswkt

(b) Wie (a) nur komplizierter.

Aufgabe 5. (b) und (c) Wie 2.(a), oder berechne $P^{(3)}$ und dann $P^{(n)}$.

Musterlösungen

Aufgabe 1. a) Die letzte Zeile summiert sich zu $1/2 + 3/7 + 3/14 = 16/14 \neq 1$, also keine Übergangsmatix.

b) Die zweite Zeile hat einen Eintrag > 1, also keine Übergangsmatrix.

c) Die zweite Zeile hat einen negativen Eintrag, also keine Übergangsmatrix.

d) Ja, das ist eine Übergangsmatrix.

Aufgabe 2. a) $\pi(0) = (\frac{1}{2}(1 + 2^{-0}), \frac{1}{2}(1 - 2^{-0})) = (1, 0)$.
"$n \to n+1$":

$$\begin{aligned}
\pi(n+1) &= \pi(n) \cdot P \\
&= \left(\frac{1}{2}(1 + 2^{-n}), \frac{1}{2}(1 - 2^{-n})\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{3}{4}\frac{1}{2}(1 + 2^{-n}) + \frac{1}{4}\frac{1}{2}(1 - 2^{-n}), \frac{1}{4}\frac{1}{2}(1 + 2^{-n}) + \frac{3}{4}\frac{1}{2}(1 - 2^{-n})\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}(1 + 2^{-(n+1)}), \frac{1}{2}(1 - 2^{-(n+1)})\right)
\end{aligned}$$

b) $\lim_{n\to\infty} \pi(n) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

c) $\pi^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Nachweis:

$$\pi^* \cdot P = \left(\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Falls ihr keine Vermutung für die stationäre Verteilung habt, berechnet die Eigenvektoren der Übergangsmatrix zum Eigenwert 1. Ihr könntet auch $\lim_{n\to\infty} p_{ii}^n$ bestimmen, was aber recht aufwendig ist.

d) Da man jederzeit zum anderen Zustand kommen kann, ist diese MK aperiodisch.

Aufgabe 3.

Umordnen $(1 \to 1, 2 \to 2, 3 \to 3, 4 \to 5, 5 \to 4, 6 \to 6)$ ergibt

$$P' := \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Da man aus den Zuständen 1 und 2 in alle anderen gelangen kann, aber nicht umgekehrt, sind diese transient. Die Zustände in den Blöcken in der Mitte und unten rechts bilden hingegen rekurente Paare, da man aus ihnen nicht mehr 'entwischen' kann.

Für die umgeordnete Matrix P' sind $\pi^1 = (0, 0, 3/7, 4/7, 0, 0)$ und $\pi^2 = (0, 0, 0, 0, 3/5, 2/5)$ stationäre Verteilungen. Dies lässt sich leicht verifizieren indem man $\pi^1 = \pi^1 \cdot P'$ und $\pi^2 = \pi^2 \cdot P'$ nachrechnet.

Aufgabe 4. Im Allgemeinen gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X(0)=a_0,\dots,X(n)=a_n) &= \mathbb{P}(X(0)=a_0)\Pi_{i=1}^n \mathbb{P}(X(i)=a_i|X(i-1)=a_{i-1}) \\ &= \pi_{a_0}(0)\Pi_{i=1}^n P_{a_{i-1}a_i}.\end{aligned}$$

(a) Mit dem Satz über die totale Wkt, oder dem Fakt, dass $X(0)$ auf jedem Fall im Zustand 1 ist, ergibt sich

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X(1)=2, X(2)=0, X(3)=2) \\ &= \sum_{i=0}^{2} \mathbb{P}(X(0)=i)\mathbb{P}(X(1)=2|X(0)=i)\mathbb{P}(X(2)=0|X(1)=2)\mathbb{P}(X(3)=2|X(2)=0) \\ &= 1\cdot\frac{1}{2}\cdot 0\cdot\frac{1}{3} \\ &= 0.\end{aligned}$$

(b) Mit der Chapman-Kolmogorov-Gleichung ergibt sich

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X(0)=2, X(1)=1, X(3)=2, X(4)=1) \\ &= \mathbb{P}(X(0)=2)\mathbb{P}(X(1)=1|X(0)=2)\left(\sum_{i=0}^{2}\mathbb{P}(X(2)=i|X(1)=1)\mathbb{P}(X(3)=2|X(2)=i)\right) \\ &\qquad \cdot\mathbb{P}(X(4)=1|X(3)=2) \\ &= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2} \\ &= \frac{5}{288}.\end{aligned}$$

Aufgabe 5.

a) Matrixmultiplikation ergibt

$$P^{(2)} = P\cdot P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

b) Durch erneute Matrixmultiplikation ergibt sich $P^{(3)} = P^{(2)}P = P$. Dadurch erhalten wir, dass

$$P^{(n)} = \begin{cases} P, & n \text{ ist ungerade,} \\ P^{(2)}, & n \text{ ist gerade.}\end{cases}$$

Somit ergibt sich, dass

$$\pi(n) = \pi(0)\cdot P^{(n)} = \begin{cases} (1,0,0,0)\cdot P, & n \text{ ist ungerade,} \\ (1,0,0,0)\cdot P^{(2)}, & n \text{ ist gerade}\end{cases} = \begin{cases} (0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}), & n \text{ ist ungerade,} \\ (\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0), & n \text{ ist gerade.}\end{cases}$$

c) Diese Markovkette ist periodisch mit Periode 2 für jeden Zustand, da sie von einem geraden immer in einen ungeraden und von einem ungeraden immer in einen geraden Zustand wechselt.

d) Da die Markovkette irreduzibel ist, gibt es nur eine stationäre Verteilung. Diese ist gegeben durch $\pi^* = (\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4})$, was sich leicht durch $\pi^* = \pi^*\cdot P$ verifizieren lässt.