

# Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik für LA Gym

Sommersemester 2020

FSU Jena

Prof. Schmalfuß  
Stefan Engelhardt

Ausgabetermin: 26.06.2020
Abgabetermin: 07.07.2020

## 5. Übungsblatt

Hinweis: Die Übungen zu diesem Blatt finden am 09.07. und am 13.07. statt.

- 📌 **Aufgabe 1.** Es sei  $X$  ein Todesprozess mit  $X(0) = 3$  und den Parametern  $\mu_3 = 2$ ,  $\mu_2 = 3$  und  $\mu_1 = 2$ . Bestimmen Sie von (von Hand) mit Hilfe der Expliziten Lösung für inhomogene lineare DGL die Wkt für  $X(t) = i$  für  $i = 0, \dots, 3$ .

**Aufgabe 2.** a) Sind für eine mathematische Stichprobe  $X_1, \dots, X_n$  die folgenden Schätzer für  $\mathbf{E}X$  erwartungstreu?

i)  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i + \frac{1}{n}$

ii)  $X_n$

iii)  $\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} X_i$

iv)  $\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}$

- b) Vergleichen Sie den Schätzer aus i) sowie aus iii) mit dem Arithmetischen Mittel bezüglich Effizienz.

- 📌 **Aufgabe 3.** a) Bestimmen Sie das 0.05 und das 0.975 Quantil der Verteilung  $\mathcal{N}(1, 4)$ .

- b) Es wird angenommen, dass eine Stichprobe Normalverteilt ist, mit unbekanntem Mittelwert  $\mu$  und bekannter Varianz  $\sigma^2 = 16$ . Weiterhin sei das arithmetische Mittel einer 25 Elemente großen Stichprobe gleich 50.1. Bestimmen Sie ein zweiseitiges Konfidenzintervall das den Erwartungswert mit Wkt 0.95 enthält.

Für die folgenden Aufgaben wird der Stoff erst noch behandelt. Diese Aufgaben können auch später abgegeben werden.

▲ **Aufgabe 4.** Gegeben sei ein Experiment  $X$  bei dem angenommen wird, dass sein Ausgang normalverteilt ist. Bei einer Stichprobe aus 20 Elementen ergab sich, dass  $\bar{x} = 13.5$  und  $s^2 = 9$ . Die Hypothese  $H_0$  ist  $\mathbf{E}X = \mu_0 = 15$  und die Alternativhypothese  $H_a$  ist  $\mathbf{E}X = \mu_a < \mu_0$ .

- Bei einem Signivikanzniveau von  $\alpha = 0.05$ , müsste diese Hypothese  $H_a$  abgelehnt werden?
- Ändert sich dies bei einem Signivikanzniveau von  $\alpha = 0.005$ ?
- Es ist nun bekannt, dass  $\text{Var}(x) = 9$  und es sei  $H_a$  die Alternativhypothese  $\mathbf{E}X = 12.5$ . Bestimmen Sie den  $\beta$ -Fehler für  $\alpha = 0.005$  im Bezug zur Alternativhypothese  $H_a$ .
- Wie groß müsste  $n$  mindestens sein, damit der  $\beta$ -Fehler für die Alternativhypothese  $H_a$  aus c) kleiner ist als 0.05, wenn  $\alpha = 0.005$ ?

Hinweis: Quantile für die Studentverteilung sind unter anderem:

$$\begin{array}{lll} t_{0.9,24} = 1.318, & t_{0.95,24} = 1.711, & t_{0.995,24} = 2.797, \\ t_{0.9,25} = 1.316, & t_{0.95,25} = 1.708, & t_{0.995,25} = 2.787, \\ t_{0.9,27} = 1.314, & t_{0.95,27} = 1.703, & t_{0.995,27} = 2.771, \\ t_{0.9,28} = 1.313, & t_{0.95,28} = 1.701, & t_{0.995,28} = 2.763, \\ t_{0.9,29} = 1.311, & t_{0.95,29} = 1.699, & t_{0.995,29} = 2.756. \end{array}$$

▲ **Aufgabe 5.** Es seien die Messpaare  $(x_i, y_i)_{i=1, \dots, 4}$  gegeben:  $(-1, 0)$ ,  $(0, -1)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(2, 3)$ . Bestimmen Sie nach dem Prinzip der kleinsten Quadrate die Gerade  $y(x) = \beta_0 + \beta_1 x$ , die am besten in die Messdaten passt.

**Abgabe:** Wir empfehlen ihnen alle Aufgaben selbst zu lösen. Bei den mit ▲ gekennzeichneten Aufgaben wird dies sogar dringend empfohlen. Lösungen können zur Korrektur an engelhardt.stefan@uni-jena.de geschickt werden.