Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik für LA Gym

Sommersemester 2020
FSU Jena

Prof. Schmalfuß
Stefan Engelhardt

Ausgabetermin:	10.06.2020
Abgabetermin:	17.06.2020

4. Übungsblatt

Aufgabe 1. In Mathematica kann die Differentialgleichung $y'(t) = a(t) \cdot y(t) + b(t)$, $y(0) = b$ durch

DSolve[{ y′[t] == a[t] y[t] + b[t], y[0] == 1 }, y[t], t]

gelöst werden. Bestimmen Sie die Lösungen für folgende Differentialgleichungen:

(a) $x'(t) = -x(t)$, $x(0) = 2$

(b) $x'(t) = 2x(t) + t$, $x(0) = 1$

(c) $x'(t) = x(t) + e^t$, $x(0) = 3$

(d) $x'(t) = t^2 x(t) + t^2$, $x(0) = 0$

Aufgabe 2. Mit der folgenden Zeile kann man die Lösung der DGL $y''(t) = y(t) + a(t)$, $y(0) = b$, $y(0) = c$ der Variable z zuweisen:

z = y[t] /. DSolve[{ y″[t] == y[t] + a[t], y[0] == b, y′[0]==c }, y[t], t]

und mit der folgenden Zeile kann man danach diese Lösung im Bereich $t \in [a, b]$ plotten

Plot[z, { t, a, b }]

Wenn man die y-Achse auf $[c, d]$ beschränken will, geht dies mit

Plot[z, { t, a, b }, PlotRange -> { c, d }]

Erstellen sie Plots für die folgenden DGL.

(a) $x''(t) + x(t) = 1$, $x(0) = 1$, $x'(3) = 2$,

(b) $x''(t) + x(t) = 1$, $x(0) = 1$, $x(3) = 2$,

(c) $x''(t) + 2x'(t) + 3 = \sin(t)$, $x(0) = 2$, $x(4) = 0$

Aufgabe 3. Um ein System von DGL zu lösen, kann folgendes verwendet werden:

```
sol0 = p0[t] /. DSolve[ {p0'[t] == - l0 p0[t], p0[0] == 1 }, p0, t][[1]]
sol1 = p1[t] /. DSolve[ {p1'[t] == - l1 p1[t] + l0 sol0, p1[0] == 0 }, p1, t][[1]]
  ⋮
sol9 = p9[t] /. DSolve[ {p9'[t] == - l9 p9[t] + l8 sol8, p8[0] == 0 }, p9, t][[1]]
```

Bestimmen und plotten Sie die Lösungen der folgenden DGL-Systeme und plotten Sie zusätzlich die Summe aller p_i um zu überprüfen, ob dies 1 ergibt.

(a) Der Yule-Prozess für i Individuen zur Zeit 0:
$p_1'(t) = -\lambda i p_1(t)$, $p_1(0) = 1$
und für alle nachfolgenden $k \geq 2$
$p_k'(t) = -\lambda(k+i-1)p_k(t) + \lambda(k+i-2)p_{k-1}(t)$, $p_k(0) = 0$
für $i = 1, 4$ und $\lambda = 0.5, 2$.

(b) Reiner Geburtsprozess:
$p_1'(t) = -\lambda_1(t)$, $p_1(0) = i$
$p_k'(t) = -\lambda_k p_k(t) + \lambda_{k-1} p_{k-1}(t)$, $p_k(0) = 0$ für $k \geq 2$.
Die Parameter seien gegeben durch $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1$, $\lambda_4 = 2$, $\lambda_5 = 0$, $\lambda_6 = 0$ und $i = 5$.

(c) Reiner Todesprozess:
$p_n'(t) = -\mu_n p_n(t)$, $p_n(0) = 1$
$p_k'(t) = -\mu_k p_k(t) + \mu_{k+1} p_{k+1}(t)$ für $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, $p_k(0) = 0$,
$p_0'(t) = \mu_1 p_1(t)$, $p_0(0) = 0$.
Die Parameter seien gegeben durch $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2$, $\mu_3 = 3$, $\mu_4 = 4$, $\mu_5 = 5$ und $n = 5$.

Abgabe: Wir empfehlen ihnen alle Aufgaben selbst zu lösen. Bei den mit ☗ gekennzeichneten Aufgaben wird dies sogar dringend empfohlen. Lösungen können zur Korrektur an engelhardt.stefan@uni-jena.de geschickt werden.