Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik für LA Gym

Sommersemester 2020
FSU Jena

Prof. Schmalfuß
Stefan Engelhardt

Ausgabetermin:	20.05.2020
Abgabetermin:	27.05.2020

2. Übungsblatt

Aufgabe 1. Welche der folgenden sind keine Übergangsmatrizen für eine Markov Kette und warum?

$$(a)\quad \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/2 & 1/5 & 3/10 \\ 1/2 & 3/7 & 3/14 \end{pmatrix} \qquad (b)\quad \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 3/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(c)\quad \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 2/3 & -1/4 & 5/12 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}, \qquad (d)\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2. Gegeben sei die Übergangsmatrix einer Markov Kette

$$P = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Weiterhin sei $\pi(0) = (1, 0)$.

(a) Man zeige: $\pi(n) = (\frac{1}{2}(1 + 2^{-n}), \frac{1}{2}(1 - 2^{-n}))$.

(b) Was gilt für $\lim_{n\to\infty} \pi(n)$?

(c) Bestimmen Sie die stationäre Verteilung dieser Markovkette.

(d) Sind die Zustände periodisch?

Aufgabe 3. Gegeben sei die Übergangsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

(a) Ordnen Sie Zeilen und Spalten so um, dass dass man die rekurrenten Äquivalenzklassen und die transienten Zustände erkennen kann. (Sie können zusätzlich auch das Übergangsdiagramm zeichnen.)

(b) Bestimmen Sie weiterhin für jede irreduzieble Teilmenge der rekurrenten Zustände eine stationäre Verteilung.

Aufgabe 4. Gegeben Sie die Übergangsmatix

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

einer Markov Kette X.

(a) Zur Zeit 0 befindet sich der Prozess im Zustand 1. Mit welcher Wahrscheinlichkeit besitzt diese Markov Ketten den Pfad

$$X(1) = 2, \quad X(2) = 0, \quad X(3) = 2?$$

(b) Nun besitze die Markov Kette die Anfangsverteilung $\pi(0) = (1/3, 1/2, 1/6)$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gilt

$$X(0) = 2, \quad X(1) = 1, \quad X(3) = 2, \quad X(4) = 1?$$

Aufgabe 5. Gegeben sei die Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten die durch sie generierte Markovkette.

(a) Man berechne $P^{(2)}$.

(b) Weiterhin zeige man für die Markov Kette mit Anfangsverteilung $\pi(0) = (1, 0, 0, 0)$, dass für die Verteilung zur Zeit $\pi(n)$ gilt:

$$\pi(n) = \begin{cases} (0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}) & : \quad n \text{ ungerade} \\ (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0) & : \quad n \text{ gerade} \end{cases}.$$

(c) Ist diese Markovkette periodisch? Falls ja, geben Sie für alle Zustände die Periode an.

(d) Bestimmen Sie die Stationäre Verteilung.

Abgabe: Wir empfehlen ihnen alle Aufgaben selbst zu lösen. Bei den mit ☗ gekennzeichneten Aufgaben wird dies sogar dringend empfohlen. Lösungen können zur Korrektur an engelhardt.stefan@uni-jena.de geschickt werden.