Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Sommersemester 2020
FSU Jena

Prof. Schmalfuß
Stefan Engelhardt

Hinweise und Musterlösung 3. Übungsblatt

Hinweise

Aufgabe 1. Definitionen und Sätze zu diesen Eigenschaften durchgehen.

Aufgabe 2. (b) Verwende Aufgabe 1.

Aufgabe 3. Was bedeutet die Unabhängigkeit? Man beachte/verwende die Rechenregeln für die Landau-Symbole. Z.B. $-o(t) = o(t)$, oder $t \cdot o(t) = o(t^2) \subseteq o(t)$.

Aufgabe 4. Definition bedingte Wkt und verwendung der Incremente.

Aufgabe 5. (b) Verwende Aufgabe 1.

Musterlösungen

Aufgabe 1. a) Weil eine Markovkette mit endlich vielen Zuständen keine null-rekurrenten Zustände haben kann (siehe Satz 67).

b) Nach Satz 61 würde dann gelten, dass $\mu_i = \frac{d(i)}{\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{d(i)n}} = \infty$ was bedeuten würde, dass i null-rekurrent ist.

c) Die Markovkette kann nicht irreduzibel sein, da i transient ist, während es, da es nur endlich viele Zustände gibt, aber rekurrente Zustände geben muss. Somit können nach Satz 59 der/die rekurrenten Zustände und i nicht kommunizieren.

Aufgabe 2. a) Da die anderen ähnlich aussehen und nicht so interessant sind, gebe ich nur $P^{(50)}$ und $P^{(51)}$ an:

$$P^{(50)} \approx \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/3 & 0 & 1/8 & 3/8 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}, \qquad P^{(51)} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ 1/6 & 1/3 & 0 & 1/8 & 3/8 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) An der Übergangsmatrix P sieht man, dass die Zustände $0, 1, 3, 4$ periodisch mit Periode 2 sind, während Zustand 2 aperiodisch ist. Da eine Markovkette mit endlich vielen Zuständen vorliegt, folgt mit Aufgabe 1, dass der Zustand 2 transitiv ist, da offenbar $p_{22}^n \to 0$ für $n \to \infty$. Gleichzeitig folgt, dass alle anderen Zustände rekurrent sind, weil $\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{d(i)n} > 0$ für $i = 0, 1, 3, 4$ und somit $\sum_{k=1}^{\infty} p_{ii}^{d(i)k} = \infty$.

c) Mit Satz 61 folgt $\mu_i = \frac{d(i)}{\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{d(i)n}}$. Dies ergibt $\mu_0 = \frac{2}{1/3} = 6$, $\mu_1 = \frac{2}{2/3} = 3$, $\mu_3 = \frac{2}{1/4} = 8$ und $\mu_4 = \frac{2}{3/4} = \frac{8}{3}$.

d) Es lässt sich leicht verifizieren, dass $\pi^* = (\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{8}, \frac{3}{8})$ eine stationäre Verteilung ist. Da alle rekurrenten Zustände kommunizieren, ist π^* die stationäre Verteilung. Es fällt auf, dass $\pi_i^* = \frac{1}{\mu_i}$ für alle rekurrenten Zustände i ist.

Aufgabe 3. Wir müssen folgende Eigenschaften überprüfen:

(i) $N(0) = N_1(0) + N_2(0) = 0 + 0 = 0$.

(ii) Da N_1 und N_2 stationäre und unabhängige Zuwächse haben, ist es recht einfach nachzurechnen, dass auch N stationäre und unabhängige Zuwächse hat.

(iii) Auf Grund der Faltungsformel und der Unabhängigkeit von N_1 und N_1 folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N(h) = 1) &= \mathbb{P}(N_1(h) = 0)\mathbb{P}(N_2(h) = 1) + \mathbb{P}(N_1(h) = 1)\mathbb{P}(N_2(h) = 0) \\
&= (1 - [\lambda_1 h + o(h) + o(h)])(\lambda_2 h + o(h)) + (\lambda_1 h + o(h))(1 - [\lambda_2 h + o(h) + o(h)]) \\
&= \lambda_2 h - \lambda_1\lambda_2 h^2 - o(h)\lambda_2 h + o(h) - \lambda_1 h o(h) - o(h)o(h) \\
&\qquad + \lambda_1 h - \lambda_2\lambda_1 h^2 - o(h)\lambda_1 h + o(h) - \lambda_2 h o(h) - o(h)o(h) \\
&= (\lambda_1 + \lambda_2)h - 2\lambda_1\lambda_2 h^2 + 2o(h)h(-\lambda_2 - \lambda_1) - 2o(h)o(h) \\
&= (\lambda_1 + \lambda_2)h + o(h),
\end{aligned}$$

da $h^2 \sim o(h)$, $ho(h) \sim o(h)$ and $o(h)o(h) \sim o(h)$.

(iv) Schließlich erhalten wir mit der Faltungsformel und der Unabhängikeit von N_1 und N_2, dass

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N(h) \geq 2) &= \mathbb{P}(N_1(h) \geq 2)\mathbb{P}(N_2(h) = 0) + \mathbb{P}(N_1(h) = 1)\mathbb{P}(N_2(h) = 1) + \mathbb{P}(N_1(h) = 0)\mathbb{P}(N_2(h) \geq 2) \\ &\quad + \mathbb{P}(N_1(h) \geq 2)\mathbb{P}(N_2(h) \geq 1) + \mathbb{P}(N_1(h) \geq 1)\mathbb{P}(N_2(h) \geq 2) \\ &= \mathbb{P}(N_1(h) \geq 2) \cdot 1 + \mathbb{P}(N_2(h) \geq 2) \cdot 1 + \mathbb{P}(N_1(h) = 1)\mathbb{P}(N_2(h) = 1) \\ &= o(h) + o(h) + (\lambda_1 h + o(h))(\lambda_2 h + o(h)) \\ &= o(h)\end{aligned}$$

Somit konnten wir für N alle Eigenschaften in Definition 73 nachweisen, was bedeutet, dass N ein Poisson Prozess ist. An der Berechnung von Punkt (iii) sieht man, dass $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ ist der Parameter von N.

Aufgabe 4. Mit der Definition von bedingten Wkt und der Unabhängigkeit der Inkremente erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N(s) = k | N(t) = n) &= \frac{\mathbb{P}(N(s) = k, N(t) = n)}{\mathbb{P}(N(t) = n)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(N(s) = k, N(t) - N(s) = n - k)}{\mathbb{P}(N(t) = n)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(N(s) = k)\mathbb{P}(N(t) - N(s) = n - k)}{\mathbb{P}(N(t) = n)} \\ &= \frac{\frac{(\lambda s)^k}{k!} e^{-\lambda s} \cdot \frac{(\lambda(t-s))^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda(t-s)}}{\frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}} \\ &= \frac{s^k (t-s)^{n-k}}{t^n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \binom{n}{k} \left(\frac{s}{t}\right)^k \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-k},\end{aligned}$$

was der Dichte der Binomialverteilung zu den Parametern n und $\frac{s}{k}$ entspricht.

Aufgabe 5.

a) Ich gebe wieder nur $P^{(50)}$ an:

$$P^{(50)} \approx \begin{pmatrix} 0.38095 & 0 & 0.42857 & 0 & 0.19048 \\ 0.38067 & 0.0003 & 0.42831 & 0.00037 & 0.19033 \\ 0.38095 & 0 & 0.42857 & 0 & 0.19048 \\ 0.38072 & 0.00025 & 0.42836 & 0.0003 & 0.19036 \\ 0.38095 & 0 & 0.42857 & 0 & 0.19048 \end{pmatrix}.$$

b) Da es danach aussieht, dass die p_{ii}^n für $0, 2, 4$ gegen werte größer 0 konvergieren und p_{11}^n sowie p_{33}^n gegen 0 zu konvergieren scheinen, sind vermutlich $0, 2, 4$ rekurrente Zustände und $1, 3$ transiente Zustände sind. Da man für alle Zustände außer 2 direkt ablesen kann, dass $p_{ii} > 0$ folgt, dass diese Zustände aperiodisch sind. Weil weiterhin Zustand 2 mit den Zuständen 0 und 4 kommuniziert, ist auch dieser aperiodisch.

c) Als Approximation der Rückkehrzeit können wir verwenden:

$$\mu_0 = \frac{1}{p_{00}^{50}} = 2.625, \qquad \mu_2 = \frac{1}{p_{22}^{50}} = 2.3333, \qquad \mu_4 = \frac{1}{p_{44}^{50}} = 5.2499$$

und für die stationäre Verteilung können wir als Approximation

$$\pi_0^* = p_{00}^{50} = 0.38095, \qquad \pi_2^* = p_{22}^{50} = 0.42857, \qquad \pi_4^* = p_{44}^{50} = 0.19048$$

verwenden.