Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Sommersemester 2020
FSU Jena

Prof. Schmalfuß
Stefan Engelhardt

Ausgabetermin:	06.05.2020
Abgabetermin:	13.05.2020

1. Übungsblatt

Aufgabe 1. Es sei $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ ein Wkt-Raum. Es seien A, B, C Ereignise und $\mathbb{P}(A) = 0.6$, $\mathbb{P}(B) = 0.5$, $\mathbb{P}(C) = 0.3$, $\mathbb{P}(A \cup B) = 0.8$, $\mathbb{P}(A \cup C) = 0.7$, $\mathbb{P}(B \cup C) = 0.65$ und $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = 0.9$.

a) Bestimmen Sie $\mathbb{P}(A \cap B)$, $\mathbb{P}(A \cap C)$, $\mathbb{P}(B \cap C)$, $\mathbb{P}(A \cap B \cap C)$.

b) Sind A, B, C unabhängig, sind sie disjunkt?

c) Bestimmen Sie $\mathbb{P}(A^c \cup B)$.

Aufgabe 2. Bei der Analyse von Motorausfällen ergab sich, dass in 50% aller Fälle eine Störung der Zündanlage, in 30% aller Fälle ein Fehler an der Kraftstoffzufuhr und in den restlichen Fällen eine sonstige Störung vorlag. Ein Pannendienst kann bei diesen Ursachen im Durchschnitt in 50%, 30% bzw. 5% aller Fälle helfen.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Pannendienst beim Ausfall des Motors helfen kann?

b) Beim Ausfall eines Motors konnte der Pannendienst nicht helfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass keine Störung der Zündanlage vorlag?

Aufgabe 3. Sei X exponentialverteilt zum Parameter $\lambda > 0$. Sei $Y := \frac{1}{\lambda} \log X$. Bestimmen Sie die Dichte und den Erwartungswert von Y.

Aufgabe 4. Die Breite von 10 Brettern sei jeweils normalverteilt mit Mittelwert $20cm$ und Standardabweichung von $0.5cm$. Wie wahrscheinlich ist es, dass diese Bretter zusammengefügt eine Gesamtbreite im Bereich von $1.95m$ bis $2.10m$ haben? Nehmen Sie hierfür an, dass die Breiten unabhängig voneinander sind.

Aufgabe 5. Es sei $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ ein Wkt-Raum. Es seinen A, B, C Ereignise, sodass $\mathbb{P}(A) = 0.5$, $\mathbb{P}(B) = 0.4$ und $\mathbb{P}(C) = 0.2$.

a) Warum können die Ereignisse A, B, C nicht disjunkt sein?

b) Die Ereignisse A, B, C seien unabhängig. Berechnen Sie $\mathbb{P}(A \cap B \cap C)$ und $\mathbb{P}(A \cup B \cup C)$.

c) Die Ereignisse A und B seien unabhängig. Weisen Sie nach, dass A^c und B^c unabhängig sind, d.h. dass $\mathbb{P}(A^c \cap B^c) = \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B^c)$ gilt.

d) Nun nehmen wir an, dass $\mathbb{P}(A \cap B) = 0.1$ und C ist unabhängig von A und von B. Berechnen Sie in diesem Fall $\mathbb{P}(A \cap B \cap C)$ und $\mathbb{P}(A \cup B \cup C)$.

Aufgabe 6. Die Zufallsvariable X habe die Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{4}x^2, & 0 \leq x \leq 2 \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

a) Hat X eine absolut stetige Verteilung, eine diskrete Verteilung oder weder noch? Begründen Sie.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit von $\mathbb{P}(0.5 < X \leq 1.5)$ und von $\mathbb{P}(0.5 \leq X < 1.5)$.

c) Es sei $Y := X^2$. Bestimmen Sie F_Y und die zugehörige Dichte f_Y. Weisen Sie nach, dass F_Y eine Verteilungsfunktion ist, d.h. prüfen Sie alle Eigenschaften aus Satz 17 des Skripts.

d) Bestimmen Sie $\mathbb{E}X$.

Abgabe: Wir empfehlen ihnen alle Aufgaben selbst zu lösen. Bei den mit ⬆ gekennzeichneten Aufgaben wird dies sogar dringend empfohlen. Lösungen können zur Korrektur an engelhardt.stefan@uni-jena.de geschickt werden.