# Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik für LA Gym

Sommersemester 2020
FSU Jena

Prof. Schmalfuß
Stefan Engelhardt

| | |
|---|---|
| Ausgabetermin: | 29.05.2020 |
| Abgabetermin: | 08.06.2020 |

**3. Übungsblatt**

**Aufgabe 1.** Sei $X$ eine Markovkette mit endlich vielen Zuständen und der Übergangsmatrix $P$. Es sei bekannt, dass für den Zustand $i$ gilt $\lim_{n\to\infty} p_{ii}^n = 0$.

(a) Warum kann der Zustand $i$ nicht null-rekurrent sein?

(b) Warum kann der Zustand $i$ nicht positiv-rekurrent sein?

(c) Ist die Markovkette $X$ irreduzibel?

**Aufgabe 2.** Für die Markovkette $X$ sei die Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie (mit computeralgebraischen Mitteln) $P^{(10)}$, $P^{(20)}$, $P^{(50)}$ und $P^{(51)}$.

(b) Welche Zustände sind rekurrent oder transitiv? Welche Zustände sind periodisch oder apriodisch?

(c) Bestimmen Sie die mittleren Rückkehrzeiten $\mu_j$ der rekurrenten Zustände.

(d) Bestimmen Sie die stationäre Verteilung. Was fällt ihnen auf, wenn Sie diese mit den mittleren Rückkhrzeiten vergleichen?

**Aufgabe 3.** Es seien $N_1, N_2$ zwei unabhängige Poisson-Prozesse zu den Parametern $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Benutzen Sie Definition 73 um nachzuweisen, dass $N = N_1 + N_2$ ebenfalls ein Poisonprozess ist. Zu welchem Parameter ist $N$ ein Poisonprozess?

Hinweis: Da $N_1, N_2 \in \mathbb{N}_0$ gilt nach der Faltungsformel für all $k \in \mathbb{N}_0$ und jedes $t \geq 0$

$$\mathbb{P}(N(t) = k) = \mathbb{P}(N_1(t) + N_2(t) = k) = \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(N_1(t) = i, N_2(t) = k - i).$$

**Aufgabe 4.** Es sei $N$ ein Poissonprozess zum Parameter $\lambda > 0$. Des Weiteren seien $0 < s < t < \infty$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}\big(N(s) = k | N(t) = n\big) = \binom{n}{k} \left(\frac{s}{t}\right)^k \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-k}$$

für $k \in \{0, \dots, n\}$. Wie heißt die Verteilung von "$N(s) = k|N(t) = n$" und welche Parameter hat diese Verteilung?

☗ **Aufgabe 5.** Für die Markovkette $X$ sei die Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie (mit computeralgebraischen Mitteln) $P^{(10)}$, $P^{(20)}$ und $P^{(50)}$.

(b) Welche Zustände sind rekurrent oder transitiv? Welche Zustände sind periodisch oder apriodisch?

(c) Bestimmen Sie eine Approximation der mittleren Rückkehrzeiten $\mu_j$ der rekurrenten Zustände und die stationäre Verteilung.

**Abgabe:** Wir empfehlen ihnen alle Aufgaben selbst zu lösen. Bei den mit ☗ gekennzeichneten Aufgaben wird dies sogar dringend empfohlen. Lösungen können zur Korrektur an engelhardt.stefan@uni-jena.de geschickt werden.