Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie

Wintersemester 20/21, FSU Jena

Prof. B. Schmalfuß
R. Hesse, M. Ritsch

Ausgabetermin: 03.11.2020

1. Übungsblatt

Aufgabe 1.

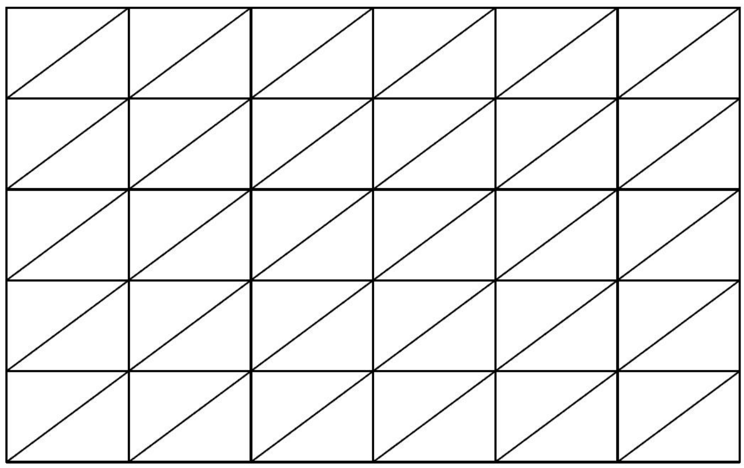
a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, bei einer Lotto-Ziehung (6 aus 49) genau 3 Richtige zu haben?

b) Ein Bit kann zwei Zustände (0 oder 1) annehmen. Ein Byte besteht aus 8 Bits (z.B. 01101011). Wie viele verschiedene Bytes gibt es?

c) 20 Personen verabschieden sich voneinander mit Händedruck. Jeder geht alleine nach Hause. Wie oft werden dabei die Hände gedrückt?

d) 15 Ehepaare verabschieden sich voneinander mit Händedruck und gehen paarweise nach Hause. Wie oft werden dabei die Hände gedrückt?

Aufgabe 2. Um von der rechten oberen Ecke in die linke untere Ecke zu gelangen, darf man nur nach links, unten und schräg nach links-unten laufen. Wie viele verschiedene Wege gibt es?



Plan der Wege

Aufgabe 3. Bilden Sie eine Kommission. Zur Auswahl stehen sieben Frauen und drei Männer. Bestimmen Sie, wie viele Möglichkeiten es jeweils gibt, eine solche Kommission zu bilden.

a) Kommission aus drei Frauen und zwei Männern.

b) Kommission beliebig groß, Anzahl Frauen und Männer gleich.

c) Kommission aus vier Personen, Herr Schmidt immer dabei.

d) Kommission aus zwei Frauen und zwei Männern, aber Frau und Herr Müller nicht gleichzeitig.

Aufgabe 4. Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Hinweis: Berechnen Sie auf 2 verschiedenen Wegen die Anzahl an Möglichkeiten, aus n schwarzen Objekten und n weißen Objekten genau n auszuwählen.

Aufgabe 5. Beim Schachspiel kann ein Turm nur horizontal und vertikal schlagen. Wir nehmen den allgemeineren Fall an, dass das Spielbrett aus $n \times n$ Feldern besteht.

a) Wie viele Möglichkeiten gibt es n ununterscheidbare Türme auf dieses Brett zu stellen, sodass keiner den anderen bedroht?

b) Bezeichnet A_n die gesuchte Zahl aus a), so **könnte** man wie folgt argumentieren:
Für einen Turm hat man n^2 Möglichkeiten, ihn zu platzieren; dieser bedroht dann eine Reihe und eine Spalte. Das Problem reduziert sich damit auf ein $n-1 \times n-1$-Brett mit $n-1$ Türmen, so dass $A_n = n^2 A_{n-1}$ ist. Dies bedeutet aber, dass

$$A_n = n^2(n-1)^2(n-2)^2 \dots 2^2 1^2 = (n!)^2.$$

Warum ist dieses **nicht** die gesuchte Lösung von a)?

Aufgabe 6. Sei $K(n) := \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n-k}{k}$.
Zeigen Sie, dass K nur Werte in $\{-1, 0, 1\}$ annimmt und ermitteln Sie $K(2020)$.
Hinweis: Der Binomialkoeffizient $\binom{m}{k}$ verschwindet falls $m < k$. Berechnen Sie $K(n+1) - K(n)$.

Abgabemodalitäten ab zweiter Serie: Die mit gekennzeichneten Aufgaben sind zu bearbeiten und bis 14 Uhr des Abgabetages bei Moodle hochzuladen. Es wird empfohlen auch die übrigen Aufgaben zu lösen.

Mailadressen:
robert.hesse@uni-jena.de, carl.christian.marian.ritsch@uni-jena.de, bjoern.schmalfuss@uni-jena.de

Bedingungen für die Teilnahme an der Klausur: 50% der Punkte aus den Übungsserien.

Die Übungsserien finden Sie auf Moodle und unter:
`https://users.fmi.uni-jena.de/~jschum/lehre/lectures.php?name=Schmalfu%25C3%259F`