Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie

Wintersemester 20/21, FSU Jena

Prof. B. Schmalfuß

R. Hesse, M. Ritsch

Ausgabetermin:	18.11.2020
Abgabetermin:	26.11.2020

3. Übungsblatt

Aufgabe 1. Gegeben seien die Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}(A) = 0,5; \quad \mathbb{P}(B) = 0,25; \quad \mathbb{P}(C) = 0,15;$$
$$\mathbb{P}(A \cap B) = 0,125; \quad \mathbb{P}(A \cap C) = 0,06;$$
$$\mathbb{P}(B \cap C) = 0,075; \quad \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0,03.$$

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse

a) $A \cup C$,

b) $A \cup B \cup C$,

c) $A^c \cap B^c \cap C$,

d) $(A^c \cap B^c) \cup C$.

Aufgabe 2. Berechnen Sie folgende bedingte Wahrscheinlichkeiten:

a) Man erhält mindestens eine 6 beim 4-maligen Werfen eines Würfels unter der Annahme, dass man in den ersten beiden Versuchen keine 6 gewürfelt hat.

b) Man erhält genau eine 3 beim Werfen dreier Würfel unter der Annahme, dass die Augensumme 5 ist.

c) Man tippt beim Lotto '6 aus 49' genau 5 Richtige unter der Annahme, dass die ersten beiden gezogenen Zahlen richtig waren.

Aufgabe 3. a) Beweisen Sie den Additionssatz für n Ereignisse:

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{k=1}^{n} \Big[(-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,n\},\\ |I|=k}} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big)\Big].$$

b) n Briefe werden zufällig in n Umschläge mit verschiedenen Empfängern gesteckt, $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Brief im richtigen Umschlag landet.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.**

a) Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Beweisen Sie für $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}, n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}).$$

b) Eine Urne enthält 3 weiße und 7 schwarze Kugeln. Zwei Spieler ziehen Kugeln nacheinander und ohne Zurücklegen. Der Spieler, der als erster eine weiße Kugel gezogen hat, gewinnt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler, der den ersten Zug macht, gewinnt.

c) Am Anfang befinden sich in einer Urne N Kugeln, k davon sind weiß und $N-k$ schwarz. Es wird eine Kugel zufällig gezogen. Anschließend wird diese und eine weitere Kugel derselben Farbe zurückgelegt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit bei 7-maligem Ziehen genau 5 weiße und 2 schwarze Kugeln zu ziehen.

Aufgabe 5 (4 Punkte)**.** Gegeben sei der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit den Ereignissen A, B, C und

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2},$$
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{32}, \quad \mathbb{P}(A \cap C) = \frac{1}{8}, \quad \mathbb{P}(B \cap C) = \frac{3}{8}, \quad \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{32}.$$

Berechnen Sie $\mathbb{P}(A \cap B^c)$, $\mathbb{P}(A \cup C^c)$, $\mathbb{P}(A^c \cup B \cup C)$, $\mathbb{P}((A \cap B^c) \cup C^c)$.

Aufgabe 6 (4 Punkte)**.** Im 17. Jahrhundert überlegte sich De Méré, dass es beim Wurf mit drei nicht unterscheidbaren fairen Würfeln genau sechs Möglichkeiten gibt, die Augensumme 11 bzw. 12 zu erzielen. Hieraus folgerte er, beide Ereignisse hätten die gleiche Wahrscheinlichkeit, fand dies aber in der Praxis nicht bestätigt. Worin bestand sein Trugschluss? Geben Sie für das obige Experiment einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum an und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für die beiden Ereignisse.

Abgabemodalitäten: Die mit ☗ gekennzeichneten Aufgaben sind zu bearbeiten und bis 14 Uhr des Abgabetages bei Moodle hochzuladen. Es wird empfohlen auch die übrigen Aufgaben zu lösen.

Mailadressen:
robert.hesse@uni-jena.de, carl.christian.marian.ritsch@uni-jena.de, bjoern.schmalfuss@uni-jena.de

Bedingungen für die Teilnahme an der Klausur: 50% der Punkte aus den Übungsserien.

Die Übungsserien finden Sie auf Moodle und unter:
`https://users.fmi.uni-jena.de/~jschum/lehre/lectures.php?name=Schmalfu%25C3%259F`