

# Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie

## Wintersemester 20/21, FSU Jena

Prof. B. Schmalfuß  
R. Hesse, M. Ritsch

Ausgabetermin:	02.12.2020
Abgabetermin:	10.12.2020

### 5. Übungsblatt

#### Aufgabe 1.

a) Gegeben sei die folgende Verteilungsfunktion  $F_X$  einer Zufallsvariablen  $X$ :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0, \\ \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x, & \text{falls } 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & \text{falls } x > 1. \end{cases}$$

Berechnen Sie  $\mathbb{P}(X = 0)$ ,  $\mathbb{P}(X > 0)$ ,  $\mathbb{P}(X < 0)$  und  $\mathbb{P}(\frac{1}{2} < X \leq \frac{3}{2})$ .

b) Sei  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, definiert durch

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \leq 3 \\ \frac{a(x-3)}{x-b}, & \text{falls } x > 3. \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Parameter  $a, b \in \mathbb{R}$ , sodass  $F$  eine Verteilungsfunktion darstellt.

#### Aufgabe 2.

a) Bei einer Statistik-Prüfung wird einem Prüfling unter anderem ein Bogen mit 20 Aussagen vorgelegt. Jede dieser Aussagen ist als richtig (R) oder falsch (F) zu kennzeichnen. Dieser Teil der Prüfung ist bestanden, wenn mindestens 15 Aussagen korrekt gekennzeichnet wurden.

Der Prüfling kennzeichnet jede Aussage unabhängig von den anderen zufällig mit R oder F (d.h. jeweils mit Wahrscheinlichkeit 0,5). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er die Prüfung besteht?

b) Wenn in einer Familie mit Wahrscheinlichkeit 0,9 mindestens ein Junge vorhanden sein soll, wie viele Kinder müsste eine solche Familie mindestens besitzen?

Dabei soll die Geburt eines Jungen genauso wahrscheinlich sein, wie die Geburt eines Mädchens.

**Aufgabe 3.** Sei  $X$  eine geometrisch verteilte Zufallsvariable, d.h.  $\mathbb{P}(X = k) = p^{k-1}(1-p)$ ,  $k \geq 1$  wobei  $p \in (0, 1)$ . Beweisen Sie für alle  $k, n \in \mathbb{N}$ , dass

$$\mathbb{P}(X = k + n | X > n) = \mathbb{P}(X = k).$$

■ **Aufgabe 4** (6 Punkte).

a) Für ein  $p \in (0, 1)$  hat die Zufallsvariable  $X$  die Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 1 - p^2, & -1 \leq x < 0 \\ 1 - p^2 + \frac{1}{4}xp^2, & 0 \leq x \leq 4 \\ 1 & x > 4. \end{cases}$$

Bestimmen Sie

- (i)  $\mathbf{P}(X = -1)$ ,
- (ii)  $\mathbf{P}(X = 0)$ ,
- (iii)  $\mathbf{P}(X \geq -\frac{1}{2})$  und
- (iv)  $\mathbf{P}(X^2 \leq 2X)$ .

b) Gegeben sei eine stetige Zufallsvariable  $X$  mit Verteilungsfunktion

$$F(x) = a \cdot \arctan(x) + b, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie  $a, b \in \mathbb{R}$ , sodass  $F$  tatsächlich eine Verteilungsfunktion ist.

■ **Aufgabe 5** (3 Punkte). Beim Bogenschießen auf eine Zielscheibe ermitteln Sie für sich eine Wahrscheinlichkeit von  $1/9$  für das Ereignis, ins Schwarze zu treffen.

- a) Wie viele Versuche benötigen Sie, um mit einer Wahrscheinlichkeit größer gleich  $0,99$  wenigstens einen Volltreffer zu erzielen? Nehmen Sie an, dass die verschiedenen Versuche stochastisch unabhängig voneinander sind.
- b) Sie hatten Pech und haben mit der in a) ermittelten Anzahl an Versuchen nicht ins Schwarze getroffen. Ermitteln Sie die Anzahl der weiteren Versuche, mit der Sie rechnen müssen, um mit Wahrscheinlichkeit größer gleich  $0,99$  wenigstens einen Volltreffer zu erzielen.

■ **Aufgabe 6** (3 Punkte). Die Nachforschungen einiger Fluggesellschaften haben gezeigt, dass jeder Passagier, der ein Flugticket reserviert, dieses mit einer Wahrscheinlichkeit von  $\frac{1}{50}$  verfallen lässt, unabhängig von den anderen Passagieren. Deshalb verkauft Fluggesellschaft A immer 102 Tickets für ihr 100-Plätze-Flugzeug und Fluggesellschaft B 204 Tickets für ihr 200-Plätze-Flugzeug. Welche der beiden Fluggesellschaften ist wahrscheinlich häufiger überbucht?

**Abgabemodalitäten:** Die mit ■ gekennzeichneten Aufgaben sind zu bearbeiten und bis 14 Uhr des Abgabetales bei Moodle hochzuladen. Es wird empfohlen auch die übrigen Aufgaben zu lösen.

**Mailadressen:**

robert.hesse@uni-jena.de, carl.christian.marian.ritsch@uni-jena.de, bjoern.schmalfuss@uni-jena.de

**Bedingungen für die Teilnahme an der Klausur:** 50% der Punkte aus den Übungsreihen.

Die Übungsreihen finden Sie auf Moodle und unter:

<https://users.fmi.uni-jena.de/~jschum/lehre/lectures.php?name=Schmalfu%25C3%259F>