Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie

Wintersemester 20/21, FSU Jena

Prof. B. Schmalfuß

R. Hesse, M. Ritsch

Ausgabetermin:	09.12.2020
Abgabetermin:	17.12.2020

6. Übungsblatt

Aufgabe 1. Unter 50 Glühbirnen in einem Karton befinden sich 5 defekte. Bei einer Qualitätskontrolle werden 3 Glühbirnen getestet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) alle 3 defekt sind?

b) genau 2 defekt sind?

c) keine defekt ist?

Aufgabe 2. Sei eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} k|x|e^{-x}, & \text{für } -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie den Parameter $k \in \mathbb{R}$, sodass f eine Dichtefunktion ist.

b) Geben Sie die Verteilungsfunktion an.

c) Ermitteln Sie $\mathbb{P}(0,5 \leq X \leq 1), \mathbb{P}(X = 0,5), \mathbb{P}(0,5 < X < 1)$.

Aufgabe 3.

a) Sei X gleichverteilt auf $[a, b]$, $0 < a < b$.
Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}(X > a) = 1$ und bestimmen Sie die Dichte von $Y = \ln\left(\frac{1}{X}\right)$.

b) Sei $a > 0$. Bestimmen Sie die Dichtefunktion des Volumens V eines Würfels, dessen Kanten K gleichverteilt auf $[0, a]$ sind.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Sei X eine stetige Zufallsvariable mit Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2}x, & 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Weiterhin sei $Y := X^2$. Bestimmen Sie

a) $\mathbb{P}(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{2})$,

b) $\mathbb{P}(Y \leq X)$,

c) $\mathbb{P}(Y + \frac{3}{4} \geq 2X)$,

d) die Verteilungsfunktion von $Z = \sqrt{X}$.

Aufgabe 5 (4 Punkte)**.** Die Anzahl der Tippfehler pro Seite in einem Buch mit 400 Seiten sei Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Es kann davon ausgegangen werden, dass die Tippfehler auf den einzelnen Seiten unabhängig sind.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Seite mindestens 2 Tippfehler enthält.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 60 Seiten mindestens 2 Tippfehler enthalten?

Aufgabe 6 (4 Punkte)**.**
Die Zufallsvariable X sei gleichverteilt auf dem Intervall $[0, 1]$. Bestimmen Sie die Verteilungen von

a) $Y_1 = aX + b$, für $a, b \in \mathbb{R}$ beliebig,

b) $Y_2 = \max\{X, 1 - X\}$.

Abgabemodalitäten: Die mit gekennzeichneten Aufgaben sind zu bearbeiten und bis 14 Uhr des Abgabetages bei Moodle hochzuladen. Es wird empfohlen auch die übrigen Aufgaben zu lösen.

Mailadressen:
robert.hesse@uni-jena.de, carl.christian.marian.ritsch@uni-jena.de, bjoern.schmalfuss@uni-jena.de

Bedingungen für die Teilnahme an der Klausur: 50% der Punkte aus den Übungsserien.

Die Übungsserien finden Sie auf Moodle und unter:
`https://users.fmi.uni-jena.de/~jschum/lehre/lectures.php?name=Schmalfu%25C3%259F`