

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie

Wintersemester 20/21, FSU Jena

Prof. B. Schmalfuß
R. Hesse, M. Ritsch

Ausgabetermin:	16.12.2020
Abgabetermin:	07.01.2021

7. Übungsblatt

Aufgabe 1. Es gelte $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ mit $\lambda > 0$. Weiter bezeichne $\lfloor X \rfloor$ den ganzzahligen Anteil von X . Für $Y := \lfloor X \rfloor + 1$ und $k \in \mathbb{N}$ berechne man $\mathbb{P}(Y = k)$. Was fällt auf?

Aufgabe 2.

a) Es sei $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

- (i) $\mathbb{P}(\mu - 0,5\sigma \leq X \leq \mu + 0,5\sigma)$,
- (ii) $\mathbb{P}(X > \mu - 3\sigma)$,
- (iii) $\mathbb{P}(|X - \mu| \leq 2\sigma)$,
- (iv) $\mathbb{P}(|X - \mu| < \sigma)$.

b) Zwei Kondensatoren werden parallel geschaltet. Die Werte für die Kapazitäten C_1 und C_2 seien unabhängig und normalverteilt mit

$$\mu_1 = 300 \mu F, \quad \sigma_1 = 3 \mu F$$

und

$$\mu_2 = 500 \mu F, \quad \sigma_2 = 4 \mu F.$$

Berechnen Sie den Wert g (in μF), sodass mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,96 die Gesamtkapazität im Intervall $[800 \mu F - g, 800 \mu F + g]$ liegt.

Hinweis: Die Gesamtkapazität ermittelt sich für parallel geschaltete Kondensatoren durch die Summe der Einzelkapazitäten.

Aufgabe 3. Sei X standardnormalverteilt. Bestimmen Sie die Dichtefunktionen von $Y_1 := e^X$ und $Y_2 := |X| - 1$.

■ **Aufgabe 4** (4 Punkte). Die zufällige Übertragungszeit T von Bildsignalen eines Kanals sei normalverteilt mit $\mu = 40 \text{ ms}$ und $\sigma = 3 \text{ ms}$, d.h. $T \sim \mathcal{N}(40, 9)$.

- a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Übertragungszeit kleiner als 46.36 ms ist.
- b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt die Übertragungszeit zwischen 37 ms und 42 ms ?
- c) Ermitteln Sie $c > 0$, sodass in dem symmetrischen Bereich $[40 - c, 40 + c]$ um die mittlere Übertragungszeit 95% aller Zeiten liegen!

🏠 **Aufgabe 5** (4 Bonuspunkte). Sei X eine exponentialverteilte Zufallsvariable zum Parameter $\lambda > 0$. Bestimmen Sie

- $\mathbb{P}(1 \leq X \leq 3)$,
- $\mathbb{P}(-2 < X < 2)$,
- $\mathbb{P}(X > t \mid X > 2)$, für alle $t \in \mathbb{R}$,
- $t \in \mathbb{R}$, sodass $\mathbb{P}(X \leq t) = \frac{3}{4}$.

🏠 **Aufgabe 6** (4 Bonuspunkte). Bei der automatischen Abfüllung von 0,5 l-Glühweinflaschen wird das abgefüllte Flüssigkeitsvolumen F als normalverteilt mit den Parametern $\mu_F = 500 \text{ ml}$ und $\sigma_F = 5 \text{ ml}$ angenommen.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine 0,5 l-Flasche weniger als 490 ml enthält?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Flasche überläuft, wenn das Volumen der Glühweinflasche unabhängig vom Flüssigkeitsvolumen normalverteilt mit den Parametern $\mu_V = 510 \text{ ml}$ und $\sigma_V = 2 \text{ ml}$ ist?

Die Übungsleiter und der Vorlesende wünschen Ihnen fröhliche Weihnachten und einen guten Rutsch.



Tabelle der Standardnormalverteilung

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.50000	.50398	.50797	.51196	.51595	.51993	.52392	.52790	.53188	.53585
0.1	.53982	.54379	.54775	.55171	.55567	.55961	.56355	.56749	.57142	.57534
0.2	.57925	.58316	.58706	.59095	.59483	.59870	.60256	.60641	.61026	.61409
0.3	.61791	.62171	.62551	.62930	.63307	.63683	.64057	.64430	.64802	.65173
0.4	.65542	.65909	.66275	.66640	.67003	.67364	.67724	.68082	.68438	.68793
0.5	.69146	.69497	.69846	.70194	.70540	.70884	.71226	.71566	.71904	.72240
0.6	.72574	.72906	.73237	.73565	.73891	.74215	.74537	.74857	.75174	.75490
0.7	.75803	.76114	.76423	.76730	.77035	.77337	.77637	.77935	.78230	.78523
0.8	.78814	.79102	.79389	.79673	.79954	.80233	.80510	.80784	.81057	.81326
0.9	.81593	.81858	.82121	.82381	.82639	.82894	.83147	.83397	.83645	.83891
1.0	.84134	.84375	.84613	.84849	.85083	.85314	.85542	.85769	.85992	.86214
1.1	.86433	.86650	.86864	.87076	.87285	.87492	.87697	.87899	.88099	.88297
1.2	.88493	.88686	.88876	.89065	.89251	.89435	.89616	.89795	.89972	.90147
1.3	.90319	.90490	.90658	.90824	.90987	.91149	.91308	.91465	.91620	.91773
1.4	.91924	.92073	.92219	.92364	.92506	.92647	.92785	.92921	.93056	.93188
1.5	.93319	.93447	.93574	.93699	.93821	.93942	.94062	.94179	.94294	.94408
1.6	.94520	.94630	.94738	.94844	.94949	.95052	.95154	.95254	.95352	.95448
1.7	.95543	.95636	.95728	.95818	.95907	.95994	.96079	.96163	.96246	.96327
1.8	.96406	.96485	.96562	.96637	.96711	.96784	.96855	.96925	.96994	.97062
1.9	.97128	.97193	.97257	.97319	.97381	.97441	.97500	.97558	.97614	.97670
2.0	.97724	.97778	.97830	.97882	.97932	.97981	.98030	.98077	.98123	.98169
2.1	.98213	.98257	.98299	.98341	.98382	.98422	.98461	.98499	.98537	.98573
2.2	.98609	.98644	.98679	.98712	.98745	.98777	.98808	.98839	.98869	.98898
2.3	.98927	.98955	.98982	.99009	.99035	.99061	.99086	.99110	.99134	.99157
2.4	.99180	.99202	.99223	.99245	.99265	.99285	.99305	.99324	.99343	.99361
2.5	.99379	.99396	.99413	.99429	.99445	.99461	.99476	.99491	.99505	.99520
2.6	.99533	.99547	.99560	.99573	.99585	.99597	.99609	.99620	.99631	.99642
2.7	.99653	.99663	.99673	.99683	.99692	.99702	.99710	.99719	.99728	.99736
2.8	.99744	.99752	.99759	.99767	.99774	.99781	.99788	.99794	.99801	.99807
2.9	.99813	.99819	.99824	.99830	.99835	.99841	.99846	.99851	.99855	.99860

Abgabemodalitäten: Die mit  gekennzeichneten Aufgaben sind zu bearbeiten und bis 14 Uhr des Abgabetales bei Moodle hochzuladen. Es wird empfohlen auch die übrigen Aufgaben zu lösen.

Mailadressen:

robert.hesse@uni-jena.de, carl.christian.marian.ritsch@uni-jena.de, bjoern.schmalfuss@uni-jena.de

Bedingungen für die Teilnahme an der Klausur: 50% der Punkte aus den Übungsserien.

Die Übungsserien finden Sie auf Moodle und unter:

<https://users.fmi.uni-jena.de/~jschum/lehre/lectures.php?name=Schmalfu%25C3%259F>