

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie  
Wintersemester 20/21, FSU Jena

Prof. B. Schmalfuß  
R. Hesse, M. Ritsch

Ausgabetermin: 06.01.2021
Abgabetermin: 14.01.2021

## 8. Übungsblatt

**Aufgabe 1.** Bestimmen Sie den Erwartungswert einer Zufallsvariablen  $X$  mit zugehöriger Dichtefunktion

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

**Aufgabe 2.**

a) Sei  $X$  eine Zufallsvariable mit Werten in  $\mathbb{N}_0$ . Zeigen Sie

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq k).$$

b) Sei  $X$  eine stetige Zufallsvariable mit Werten in  $\mathbb{R}_+$  und Dichte  $f_X$  sowie Verteilungsfunktion  $F_X$ . Zeigen Sie

$$\mathbb{E}X = \int_0^{\infty} (1 - F_X(x)) dx.$$

c) Für  $\lambda > 0$  sei eine Zufallsvariable  $X$  gegeben durch die Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x^2}{\lambda}} & , \text{ für } x > 0, \\ 0 & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie den Erwartungswert von  $X$ .

**Aufgabe 3.** Sei  $X$  eine stetige Zufallsvariable mit Dichtefunktion

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}.$$

Zeigen Sie, dass  $X$  keinen Erwartungswert besitzt.

■ **Aufgabe 4** (2 Punkte). Sei  $X$  geometrisch verteilt zum Parameter  $p \in (0, 1)$ . Bestimmen Sie den Erwartungswert von  $X$ .

■ **Aufgabe 5** (5 Punkte). Es sei  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ ,  $\lambda > 0$ . Berechnen Sie den Erwartungswert von

a)  $Y_1 = e^{-X}$ ,

b)  $Y_2 = -3X + 4$ ,

c)  $Y_3 = \lfloor X \rfloor + 1$ .

Hinweis: Für eine reelle Zahl  $x$  ist  $\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ .

♣ **Aufgabe 6** (5 Punkte). Die Funktion  $f$  sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0, \\ \alpha x^2(2-x) & , 0 \leq x \leq 2, \\ 0 & , x > 2. \end{cases}$$

- a) Bestimmen Sie  $\alpha \in \mathbb{R}$ , sodass  $f$  eine Dichtefunktion einer Zufallsvariablen  $X$  ist.
- b) Berechnen Sie den Erwartungswert von  $X$ .
- c) Sei  $Y := X^2$ . Berechnen Sie den Erwartungswert von  $Y$  einmal mittels der Dichte von  $Y$  und zum anderen mittels der Transformationsformel

$$\mathbb{E}g(X) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx.$$

**Abgabemodalitäten:** Die mit ♣ gekennzeichneten Aufgaben sind zu bearbeiten und bis 14 Uhr des Abgabetermins bei Moodle hochzuladen. Es wird empfohlen auch die übrigen Aufgaben zu lösen.

**Mailadressen:**

robert.hesse@uni-jena.de, carl.christian.marian.ritsch@uni-jena.de, bjoern.schmalfuss@uni-jena.de

**Bedingungen für die Teilnahme an der Klausur:** 50% der Punkte aus den Übungsserien.

Die Übungsserien finden Sie auf Moodle und unter:

<https://users.fmi.uni-jena.de/~jschum/lehre/lectures.php?name=Schmalfu%25C3%259F>