

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie
Wintersemester 20/21, FSU Jena

Prof. B. Schmalfuß
R. Hesse, M. Ritsch

Ausgabetermin:	13.01.2021
Abgabetermin:	21.01.2021

9. Übungsblatt

Aufgabe 1.

- a) Sei X eine Poisson-verteilte Zufallsvariable zum Parameter $\lambda > 0$. Bestimmen Sie die Varianz von X .
b) Sei X eine exponentialverteilte Zufallsvariable zum Parameter $\lambda > 0$. Bestimmen Sie die Varianz von

$$Y = \lfloor X \rfloor + 1.$$

Aufgabe 2.

- a) Zeigen Sie, dass für unabhängige Zufallsvariablen X, Y gilt:

$$m_{X+Y}(t) = m_X(t) \cdot m_Y(t).$$

- b) Sei $S_{n,p} \sim \text{Bin}(n, p)$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0, 1)$. Bestimmen Sie die momenterzeugende Funktion $m_{S_{n,p}}$.
c) Sei $Z_\lambda \sim \text{Poisson}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Bestimmen Sie die momenterzeugende Funktion m_{Z_λ} .
d) Zeigen Sie, dass für alle $t \in \mathbb{R}_+$ gilt $m_{S_{n, \frac{\lambda}{n}}}(t) \rightarrow m_{Z_\lambda}(t)$, $n \rightarrow \infty$.

Hinweis: Zwei Zufallsvariablen heißen unabhängig, falls die durch diese Zufallsvariablen erzeugten Ereignisse unabhängig sind.

Aufgabe 3.

- a) Sei X eine Zufallsvariable mit $\mathbb{E}X^2 < \infty$. Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$, sodass $\mathbb{E}(X - a)^2$ minimal ist.
b) Sei X standardnormalverteilt. Bestimmen Sie $\mathbb{E}X^4$.

- ◆ **Aufgabe 4** (2 Punkte). Sei X eine Zufallsvariable mit $\mathbb{E}X^2 < \infty$. Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\text{Var}(a \cdot X + b) = a^2 \cdot \text{Var}(X).$$

- ◆ **Aufgabe 5** (4 Punkte). Es sei $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Berechnen Sie die Varianz von

- a) $Y_1 = e^{-X}$,
b) $Y_2 = -3X + 4$.

♣ **Aufgabe 6** (6 Punkte). Es sei X eine exponentialverteilte Zufallsvariable zum Parameter $\lambda > 0$.

- a) Bestimmen Sie die Varianz von X mit Hilfe der Transformationsformel.
- b) Bestimmen Sie die momenterzeugende Funktion von X . Was ist der Definitionsbereich dieser Funktion?
- c) Leiten Sie aus der momenterzeugenden Funktion die Varianz und das dritte Moment von X her.

Abgabemodalitäten: Die mit ♣ gekennzeichneten Aufgaben sind zu bearbeiten und bis 14 Uhr des Abgabetermins bei Moodle hochzuladen. Es wird empfohlen auch die übrigen Aufgaben zu lösen.

Mailadressen:

robert.hesse@uni-jena.de, carl.christian.marian.ritsch@uni-jena.de, bjoern.schmalfuss@uni-jena.de

Bedingungen für die Teilnahme an der Klausur: 50% der Punkte aus den Übungsserien.

Die Übungsserien finden Sie auf Moodle und unter:

<https://users.fmi.uni-jena.de/~jschum/lehre/lectures.php?name=Schmalfu%25C3%259F>