Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie

Wintersemester 20/21, FSU Jena

Prof. B. Schmalfuß
R. Hesse, M. Ritsch

Ausgabetermin:	20.01.2021
Abgabetermin:	28.01.2021

10. Übungsblatt

Aufgabe 1.

a) Gegeben sei eine absolut stetige Zufallsvariable X mit zugehöriger Dichtefunktion

$$f_X(x) = \frac{1}{2}\, e^{-|x|} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie für $q = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ die Quantile z_q.

b) Gegeben sei eine diskrete Zufallsvariable Y mit zugehöriger Zähldichte

$$\mathbb{P}(Y = k) = \frac{1}{k(k+1)} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Bestimmen Sie für $q = \frac{1}{3}, \frac{3}{4}$ die Quantile z_q.

Aufgabe 2. In einem Krankenhaus werden n Babys in einer bestimmten Woche geboren. Es soll davon ausgegangen werden, dass sich darunter keine Mehrlingsgeburten befinden, die Wahrscheinlichkeit für die Geburt eines Mädchens oder eines Junges jeweils $\frac{1}{2}$ ist und dass diese Ereignisse unabhängig voneinander sind. Mit b_n soll die Wahrscheinlichkeit bezeichnet werden, dass mindestens 60% der Neugeborenen Mädchen sind.

a) Berechnen Sie b_{10}.

b) Beweisen Sie mittels der Chebyshev-Ungleichung, dass $b_{100} < b_{10}$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Aufgabe 3. Eine Zufallsvariable X heißt Rayleigh–verteilt mit Parameter σ^2, falls sie die Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

besitzt.

a) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von X.

b) Geben Sie eine Formel für die Quantile an.

c) Geben Sie eine Möglichkeit an (theoretisch) Rayleigh–verteilte Zufallszahlen zu erzeugen.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Um das Integral $I := \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ mit Hilfe der Monte–Carlo–Methode zu approximieren, betrachtet man

$$I_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i),$$

wobei $X_1, \dots, X_n$ unabhängige, jeweils auf $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen sind.

a) Bestimmen Sie $\mathbb{E}I_n$ und $\mathrm{Var}(I_n)$ für $n \in \mathbb{N}$.

b) Sei $|f(x)| \leq 1$ für alle $x \in [0,1]$. Zeigen Sie mit Hilfe der Chebyshev-Ungleichung, dass I_n für $n = 10^6$ mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% die gesuchte Größe I auf mindestens zwei Nachkommastellen genau approximiert.

Aufgabe 5 (4 Punkte)**.** Gegeben sei eine Zufallsvariable X mit

a) der Verteilung
$$\mathbb{P}(X = a) = p,\ \mathbb{P}(X = b) = q \text{ und } \mathbb{P}(X = c) = 1 - p - q,$$
wobei $p, q, 1 - p - q > 0$ und $a < b < c$,

b) der Dichte
$$f_X(x) = \begin{cases} 2x, & \text{falls } x \in [0,1], \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

Generieren Sie jeweils Zufallszahlen mit den zugehörigen Verteilungen unter der Annahme, dass gleichverteilte Zufallszahlen auf $[0,1]$ zur Verfügung stehen.

Aufgabe 6 (4 Punkte)**.** Man betrachte die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ c(x-1), & 1 \leq x \leq 3 \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

a) Für welchen Wert der Konstanten c ist f eine Dichte einer Zufallsvariablen X?

b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von X.

c) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

d) Bestimmen Sie das α-Quantil für $\alpha = \frac{3}{4}$.

Abgabemodalitäten: Die mit ☗ gekennzeichneten Aufgaben sind zu bearbeiten und bis 14 Uhr des Abgabetages bei Moodle hochzuladen. Es wird empfohlen auch die übrigen Aufgaben zu lösen.

Mailadressen:
robert.hesse@uni-jena.de, carl.christian.marian.ritsch@uni-jena.de, bjoern.schmalfuss@uni-jena.de

Bedingungen für die Teilnahme an der Klausur: 50% der Punkte aus den Übungsserien.

Die Übungsserien finden Sie auf Moodle und unter:
`https://users.fmi.uni-jena.de/~jschum/lehre/lectures.php?name=Schmalfu%25C3%259F`