Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie

Wintersemester 20/21, FSU Jena

Prof. B. Schmalfuß

R. Hesse, M. Ritsch

Ausgabetermin:	27.01.2021
Abgabetermin:	04.02.2021

11. Übungsblatt

Aufgabe 1.

a) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger exponentialverteilter Zufallsvariablen mit Parameter $\lambda > 0$. Weiterhin sei

$$Y_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Zeigen Sie, dass für alle $\varepsilon > 0$ gilt

$$\mathbb{P}\left(\left|Y_n - \frac{1}{\lambda}\right| > \varepsilon\right) \to 0, \text{für } n \to \infty.$$

b) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(X_1 = 0) = 1$,

$$\mathbb{P}(X_n = -n) = \mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n^2} \text{ und } \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{2}{n^2} \text{ für } n \geq 2.$$

Zeigen Sie, dass für alle $\varepsilon > 0$ gilt

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right| \leq \varepsilon\right) \to 1, \text{ für } n \to \infty.$$

Aufgabe 2. Ein Angestellter verlässt an den 225 Arbeitstagen eines Jahres sein Büro kurz nach Dienstschluss. Die Dauer der zusätzlichen Arbeitszeit pro Tag lässt sich mit einer exponentialverteilten Zufallsvariable mit dem Erwartungswert von 5 Minuten angemessen beschreiben. Die Zufallsvariablen seien als unabhängig vorausgesetzt. Berechnen Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Angestellte dadurch in einem Jahr insgesamt mehr als 15 Überstunden arbeitet.

Aufgabe 3. Wir werfen einen fairen Würfel unabhängig voneinander 1000-mal. Die erwartete Augensumme aller Würfe liegt bei 3500. Wie ist das Intervall $[3500 - c, 3500 + c]$ näherungsweise zu wählen, damit die tatsächliche Augensumme mit Wahrscheinlichkeit größer als 0.95 darin liegt?

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Ein Grashüpfer startet am Ursprung der Zahlengerade und hüpft mit Wahrscheinlichkeit $p = 0.6$ um zwei Einheiten in die positive Richtung und mit der Wahrscheinlichkeit von $1 - p = 0.4$ um eine Einheit in die negative Richtung. X_n gebe die Position des Grashüpfers nach n Sprüngen an.

a) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X_n.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes approximativ die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Tier nach 10000 Sprüngen im Intervall [7700, 8090] befindet.

Aufgabe 5 (4 Punkte)**.** Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}X_n = \mu$ und $\operatorname{Var}(X_n) = \sigma^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei

$$\widetilde{S}_n := X_1 + 2X_2 + \ldots + nX_n = \sum_{k=1}^{n} kX_k.$$

a) Bestimmen Sie $\mathbb{E}\widetilde{S}_n$ und $\operatorname{Var}(\widetilde{S}_n)$.

b) Zeigen Sie mit Hilfe des schwachen Gesetzes der großen Zahlen oder der Chebyshev-Ungleichung, dass für alle $\varepsilon > 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{\widetilde{S}_n}{n(n+1)} - \frac{\mu}{2}\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

Aufgabe 6 (4 Punkte)**.** Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger identisch verteilter Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}X_n = 0$ und $\mathbb{E}X_n^2 < \infty$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei zusätzlich $S_n := X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.
Es sei bekannt, dass

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n > \sqrt{n}) = \frac{1}{4}.$$

Bestimmen Sie die Standardabweichung $\sqrt{\operatorname{Var}(X_1)}$.

Abgabemodalitäten: Die mit ☗ gekennzeichneten Aufgaben sind zu bearbeiten und bis 14 Uhr des Abgabetages bei Moodle hochzuladen. Es wird empfohlen auch die übrigen Aufgaben zu lösen.

Mailadressen:
robert.hesse@uni-jena.de, carl.christian.marian.ritsch@uni-jena.de, bjoern.schmalfuss@uni-jena.de

Bedingungen für die Teilnahme an der Klausur: 50% der Punkte aus den Übungsserien.

Die Übungsserien finden Sie auf Moodle und unter:
`https://users.fmi.uni-jena.de/~jschum/lehre/lectures.php?name=Schmalfu%25C3%259F`