Musterlösung zu Blatt 12

Daniel Max, Jamal Drewlo, Stefan Engelhardt, Prof. Michael Neumann

EWMS WiSe 2020/21

Aufgabe 35

(i) Sei $\hat{\theta} = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ mit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$E_\theta[\hat{\theta}] = E_\theta[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i] = a_1 E_\theta[X_1] + \ldots + a_n E_\theta[X_n] = (a_1 + \ldots + a_n)\theta.$$

Damit $\hat{\theta}$ erwartungstreu für θ ist, muss also $a_1 + \ldots + a_n = 1$ gelten.

(ii) Da die X_i unabhängig sind, sind auch $a_i X_i$ mit $a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n$, unabhängige Zufallsvariablen. Damit und unter Voraussetzung der Erwartungstreue von $\hat{\theta}$ gilt daher

$$\begin{aligned} E_\theta[(\hat{\theta} - \theta)^2] &= E_\theta[(\hat{\theta} - E_\theta[\hat{\theta}])^2] = \mathrm{Var}_\theta[\hat{\theta}] \\ &= \mathrm{Var}_\theta[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \mathrm{Var}_\theta[X_i] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2. \end{aligned}$$

Der Hinweis liefert mit $\bar{a}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{1}{n}$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} a_i^2 &= \sum_{i=1}^{n} (a_i - \bar{a}_n)^2 + n\bar{a}_n^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(a_i - \frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \;\geq\; \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

da der Ausdruck in der Summe stets nichtnegativ ist. Wählen wir $a_i = \frac{1}{n}$ für alle $i = 1, \ldots, n$, wird der mittlere quadratische Fehler entsprechend minimal.

Aufgabe 36

(i) Unter Ausnutzung der Unabhängigkeit gilt

$$
\begin{aligned}
F_Y(x) &= P(Y \leq x) \\
&= P(X_1 \leq x, X_2 \leq x, \ldots, X_n \leq x) \\
&= P(X_1 \leq x) \cdot P(X_2 \leq x) \cdot \ldots \cdot P(X_n \leq x) \\
&= \left(\frac{x}{\theta}\right)^n \ , \ x \in [0, \theta],
\end{aligned}
$$

sowie $F_Y(x) = 0$ für $x \leq 0$ und $F_Y(x) = 1$ für $x \geq \theta$. Die Dichte f_y erhalten wir als Ableitung der Verteilungsfunktion:

$$
f_y(x) = \frac{n}{\theta^n} x^{n-1} \cdot \mathbf{1}_{[0,\theta]}(x).
$$

(ii) Sei $\hat{\theta} = c_n Y$. Dann ist

$$
\begin{aligned}
E_\theta[\hat{\theta}] &= c_n \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_y(x) \ \mathrm{dx} \\
&= c_n \cdot \frac{n}{\theta^n} \cdot \int_0^\theta x^n \ \mathrm{dx} \\
&= c_n \cdot \frac{n}{\theta^n} \cdot \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^\theta \\
&= c_n \cdot \frac{n}{\theta^n} \cdot \frac{\theta^{n+1}}{n+1} \\
&= c_n \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \theta.
\end{aligned}
$$

Damit der letzte Term θ ergibt, muss $c_n \cdot \frac{n}{n+1} = 1$ sein. $\hat{\theta}$ ist also ein erwartungstreuer Schätzer für θ, falls $c_n = \frac{n+1}{n}$.

(iii)

$$
\begin{aligned}
E_\theta[(\hat{\theta} - \theta)^2] &= E_\theta[\hat{\theta}^2 - 2\theta\hat{\theta} + \theta^2] \\
&= \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 E_\theta[Y^2] - 2\theta \cdot \frac{n+1}{n} E_\theta[Y] + \theta^2 \\
&= \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{n}{n+2}\theta^2 - 2\theta \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n+1}\theta + \theta^2 \\
&= \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\theta^2 - 2\theta^2 + \theta^2 \\
&= \frac{1}{n(n+2)}\theta^2.
\end{aligned}
$$