# Musterlösung zu Blatt 3

Daniel Max

EWMS WiSe 2020/21

**Aufgabe 1**

Modellierung: Als Ergebnisraum wählen wir

$$\Omega = \Big\{(\omega_1, \omega_2) : \omega_i \in \{K, Z\}\Big\},$$

als $\sigma$-Algebra $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$, ferner ist

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} \text{ für alle } \omega \in \Omega,$$

sodass auf natürliche Weise ein Laplace-Experiment entsteht.

Seien $A = \{\text{beide Münzen zeigen Zahl}\}$, $B = \{\text{die erste Münze zeigt Zahl}\}$ sowie $C = \{\text{eine der beiden Münzen zeigt Zahl}\}$. Dann gilt

$$\text{(i) } P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

und

$$\text{(ii) } P(A \mid C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}.$$

**Anmerkung**: Das Ereignis $C$ wird hier im Sinne von „mindestens eine“ verstanden. Bei Auslegung als „genau eine“ ergibt sich in (ii) natürlich eine andere Wahrscheinlichkeit.

**Aufgabe 2**

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W'keitsraum und $B \in \mathcal{A}$ mit $P(B) > 0$. Dann ist $P(\cdot \mid B)$ mit $P(A \mid B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ für alle $A \in \mathcal{A}$ ein W'keitsmaß auf $\mathcal{A}$:

Zunächst ist $P(A \mid B) \geq 0$, da $P(B) > 0$ und $P(A \cap B)$ nichtnegativ ist. Die Normiertheit folgt wegen

$$P(\Omega \mid B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1.$$

Seien nun $A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt. Dann gilt

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \mid B) = \frac{1}{P(B)} \cdot \ P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \cap B) = \frac{1}{P(B)} \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \mid B),$$

wobei wir benutzt haben, dass $P(\cdot)$ $\sigma$-additiv ist. Damit ist auch $P(\cdot \mid B)$ $\sigma$-additiv, also ein W'keitsmaß auf $\mathcal{A}$.

**Bemerkung**: Man nennt $P(\cdot \mid B) : \mathcal{A} \to [0,1]$ auch die *bedingte Verteilung* von $A$ unter der Bedingung $B$.

**Aufgabe 3**

Sei $A = \{\text{Autofahrer nicht angeschnallt}\}$ und $B = \{\text{Unfall mit Kopfverletzung}\}$. Gesucht ist $P(A \mid B)$. Es gelten

$$\begin{aligned} P(A) &= 0{,}15 \quad P(B \mid A) = 0{,}38 \\ P(A^{\mathrm{C}}) &= 0{,}85 \quad P(B \mid A^{\mathrm{C}}) = 0{,}08 \end{aligned}$$

was wir den bereitgestellten Informationen unmittelbar entnehmen können. Einsetzen der Definition von bedingter W'keit und Anwenden der Formel von der totalen W'keit liefert

$$\begin{aligned} P(A \mid B) &= \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{P(B \mid A) \cdot P(A)}{P(B)} \\ &= \frac{P(B \mid A) \cdot P(A)}{P(B \mid A) \cdot P(A) + P(B \mid A^{\mathrm{C}}) \cdot A^{\mathrm{C}}} \\ &= \frac{0{,}38 \cdot 0{,}15}{0{,}38 \cdot 0{,}15 + 0{,}08 \cdot 0{,}85} \\ &= 0{,}456. \end{aligned}$$

**Aufgabe 4**

Sei

$$A = \{\text{LKW-Ladung besitzt nicht das richtige Mischungsverhältnis}\}$$

und

$$B_j = \{\text{LKW-Ladung stammt von Firma j}\}.$$

(i) Die Ereignisse $B_j,\ j = 1, ..., 4$, bilden eine Partition des zugehörigen Wahrscheinlichkeitsraums (interpretiert als "Menge aller Fertigbeton-Lieferungen", die jeweils zufällig ausgewählt werden). Daher ergibt sich mittels totaler W'keit:

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{j=1}^{4} P(A \mid B_j) P(B_j) \\ &= 0{,}01 \cdot 0{,}1 + 0{,}004 \cdot 0{,}2 + 0{,}003 \cdot 0{,}3 + 0{,}001 \cdot 0{,}4 \\ &= 0{,}0031 = 0{,}31\%. \end{aligned}$$

(ii) Wir berechnen

$$\begin{aligned} P(B_1 \mid A) &= \frac{P(A \cap B_1)}{P(A)} \\ &= \frac{P(A \mid B_1) \cdot P(B_1)}{P(A)} \\ &= \frac{0{,}01 \cdot 0{,}1}{0{,}0031} \approx 0{,}3226 = 32{,}26\%. \end{aligned}$$