# Musterlösung zu Blatt 6

Daniel Max, Jamal Drewlo, Stefan Engelhardt, Prof. Michael Neumann

EWMS WiSe 2020/21

**Aufgabe 19**

(i) Wir berechnen

$$\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot P(X = n) \\
&= P(X = 1) + 2 \cdot P(X = 2) + 3 \cdot P(X = 3) + ... \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P(X = n) + P(X = n + 1) + P(X = n + 2) + .. \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{t=n}^{\infty} P(X = t) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n).
\end{aligned}$$

(ii) Zunächst gilt für $k \in \mathbb{N}$

$$P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}.$$

Ferner berechnen wir (unter anderem mittels Anwenden der geom. Reihe)

$$\begin{aligned}
P(X \geq k) &= \sum_{j=k}^{\infty} p(1 - p)^{j-1} = (1 - p)^k p \sum_{j=0}^{\infty} (1 - p)^{j-1} \\
&= (1 - p)^k p \; (\frac{1}{1 - p} + \sum_{j=0}^{\infty} (1 - p)^j) \\
&= (1 - p)^k p \; (\frac{1}{1 - p} + \frac{1}{1 - (1 - p)}) = (1 - p)^{k-1}.
\end{aligned}$$

Somit folgt mit (i)

$$E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k) = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - p)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - p)^k = \frac{1}{1 - (1 - p)} = \frac{1}{p}.$$

**Aufgabe 20**

Seien $X_1 \sim \mathrm{Poi}_{\lambda_1}$ und $X_2 \sim \mathrm{Poi}_{\lambda_2}$ stochastisch unabhängig. Mit der Faltungsformel (Satz 5.15) und dem binom. Lehrsatz erhalten wir

$$\begin{aligned}
P(X_1 + X_2 = k) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} P(X_1 = l)P(X_2 = k - l) \\
&= \sum_{l=0}^{k} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^l}{l!} e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{k-l}}{(k-l)!} \\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \lambda_1^l \lambda_2^{k-l} \\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^k}{k!},
\end{aligned}$$

d.h. $X_1 + X_2 \sim \mathrm{Poi}_{\lambda_1+\lambda_2}$.

**Aufgabe 21**

Wir nummerieren die Gasmoleküle gedanklich durch und definieren

$$X_i := \begin{cases} 1, & \text{falls Molekül } i \text{ in linker Gefäßhälfte} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Offenbar sind die $X_i$ unabhängig und jeweils Bernoulli-verteilt mit Parameter $p = \frac{1}{2}$, d.h. $X_i \sim \mathrm{Ber}_{\frac{1}{2}}$ für alle $i = 1, ..., n$, wobei $n = 0,25 \cdot 10^{23}$.

Sei nun $X :=$ „Anzahl Moleküle in der linken Gefäßhälfte“. Dann ist $X = X_1 + X_2 + ... + X_n \sim \mathrm{Bin}_{n,p}$. Es folgt

$$\begin{aligned} E[X] &= n \cdot p = 0,25 \cdot 10^{23} \cdot \frac{1}{2} = 1,25 \cdot 10^{22} \\ \mathrm{Var}[X] &= n \cdot p \cdot (1-p) = 6,25 \cdot 10^{21}. \end{aligned}$$

Ein Anteil von größer als $\frac{1+10^{-8}}{2}$ in der linken Gefäßhälfte entspricht einer (rechtsseitigen) Abweichung vom Erwartungswert um mindestens $\frac{1+10^{-8}}{2} \cdot n - E[X] = 1,25 \cdot 10^{14}$. Mit der Tschebyscheff-Ungleichung erhalten wir

$$P(|X - E[X]| \geq 1,25 \cdot 10^{14}) \leq \frac{\mathrm{Var}[X]}{(1,25 \cdot 10^{14})^2} = 4 \cdot 10^{-7}.$$

Da lediglich nach einer Abweichung in positiver Richtung gefragt wird, müssen wir den Wert auf der rechten Seite noch halbieren und erhalten schließlich

$$P(\text{Anteil Moleküle links} \geq \frac{1+10^{-8}}{2}) \leq \frac{4 \cdot 10^{-7}}{2} = 2 \cdot 10^{-7}.$$

**Aufgabe 22**

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von diskreten Zufallsvariablen auf einem W'keitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und es gelte $E[|X_n|] \to 0$ für $n \to \infty$. Dann gilt für beliebig vorgegebenes $\epsilon > 0$ mit der Markoff-Ungleichung

$$P(|X_n| \geq \epsilon) \leq \frac{E[|X_n|]}{\epsilon}.$$

Wenn also $E[|X_n|] \to 0$ für $n \to \infty$, so konvergiert die rechte Seite gegen 0 und somit auch $P(|X_n| \geq \epsilon)$, d.h. $X_n \xrightarrow{P} 0$.

**Anmerkung:** Die Aufgabe steht im Bezug zum Begriff der "Konvergenz im p-ten Mittel": Eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Zufallsvariablen konvergiert im p-ten Mittel gegen eine Zufallsvariable $X$, falls

$$\lim_{n\to\infty} E[|X_n - X|^p] = 0,$$

kurz $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} X$. Man kann zeigen, dass Konvergenz im p-ten Mittel stochastische Konvergenz impliziert, d.h. $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X$. Die oben bewiesene Aussage ist ein Spezialfall dieses Satzes für $X \equiv 0$ und $p = 1$.