Musterlösungen EWMS, Serie 2

FSU Jena

Prof. Neumann,
Jamal Drewlo, Stefan Engelhardt, Daniel Max

Aufgabe 5. Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebar in Ω. D.h. wir haben folgende Eigenschaften gegeben:

(a) $\Omega \in \mathcal{A}$,

(b) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$,

(c) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Daraus können wir herleiten:

(i) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$:
$A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{A} \overset{(b)}{\Longrightarrow} A_1^c, A_2^c, \ldots \in \mathcal{A} \overset{(c)}{\Longrightarrow} \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c \in \mathcal{A}$
Weil $a \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c \Leftrightarrow \exists i \geq 1 : a \in A_i^c \Leftrightarrow \exists i \geq 1 : a \notin A_i \Leftrightarrow a \notin \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$, folgt $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c = (\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i)^c$. Somit erhalten wir $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c = (\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i)^c \in \mathcal{A} \overset{(b)}{\Longrightarrow} \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

(ii) $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A} \Longrightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}, \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$:
Definiere $A_{n+k} := A_n$ für alle $k \geq 1$. Dann gilt

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \cup \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \overset{(c)}{\in} \mathcal{A} \qquad \text{und} \qquad \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \overset{(i)}{\in} \mathcal{A}.$$

(iii) $A, B \in \mathcal{A} \Longrightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$:
Wegen (b) folgt, dass $B^c \in \mathcal{A}$. Weil des Weiteren $A \setminus B = A \cap B^c$ folgt mit (ii), dass $A \setminus B \in \mathcal{A}$.

Aufgabe 6. (i) $A_k = \{\omega \in \Omega : \sum_{i=1}^{n} \omega_i = k\}$

(ii) Jede k-elementige Menge hat 2^k Teilmengen. Dies ist ersichtlich, da man jede Teilmenge dadurch charakterisieren kann, welche Elemente enthalten sind und welche nicht. Da nun jedes Element in einer Teilmenge entweder enthalten ist oder nicht, es also für jedes Element zwei Möglichkeiten gibt, und dies für alle Elemente gilt, ist die Anzahl aller möglichen Kombinationen gleich 2^k.
Weil $\#\Omega = 2^n$ folgt also, dass $\#\mathcal{P}(\Omega) = 2^{2^n}$.

Offenbar sind die Mengen A_k, $k = 0, \ldots, n$ disjunkt und ihre Vereinigung ergibt Ω. Da wir somit jede mögliche Kombination aus Vereinigungen von A_k codieren können mit A_i ist enthalten für jedes einzellne $i \in [0, \ldots, n]$, erhalten wir, dass es 2^{n+1} solcher Möglichkeiten für Vereinigungen ist. Dabei haben wir $\emptyset$ mitgezählt als Vereinigung über die leere Indexmenge. Weil sich nun jedes Komplement und jeder Schnitt dieser Mengen ebenfalls als eine Vereinigung von A_k schreiben lässt - es gilt ja $\Omega = \bigcup_{i=0}^{n} A_i$ -, erfüllt die Menge aller Vereinigungen bereits die Eigenschaften einer σ-Algebra. Somit bildet sie die kleinste σ-Algebra und wir wissen, dass die kleinste σ-Algebra, die die Mengen $A_0, \ldots, A_n$ enthält 2^{n+1} Elemente hat.

Aufgabe 7. Diese Gleichung wird auch die Siebformel genannt. Wir beweisen sie via Induktion:

- „$n = 1$": Dieser Fall ist trival zu überprüfen, da $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \mathbb{P}\left(A_1\right)$.
  „$n = 2$":

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) &= \mathbb{P}((A_1 \setminus (A_1 \cap A_2)) \cup (A_1 \cap A_2) \cup (A_2 \setminus (A_1 \cap A_2))) \\
&= \mathbb{P}(A_1 \setminus (A_1 \cap A_2)) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbb{P}(A_2 \setminus (A_1 \cap A_2)) \\
&= \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{(i_1,\dots,i_k):1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}).
\end{aligned}$$

- „$n \to n + 1$":

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cup A_{n+1})\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{(i_1,\dots,i_k):1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} \mathbb{P}((A_{i_1} \cup A_{n+1}) \cap \ldots \cap (A_{i_k} \cup A_{n+1})) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{(i_1,\dots,i_k):1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} \mathbb{P}((A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) \cup A_{n+1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{(i_1,\dots,i_k):1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} \big[\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) + \mathbb{P}(A_{n+1}) \\
&\qquad - \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k} \cap A_{n+1})\big] \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} \sum_{(i_1,\dots,i_k):1 \le i_1 < \dots < i_k \le n+1} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}).
\end{aligned}$$

Man könnte zusätzlich noch erwähnen, dass $\bigcup_{i=1}^n A_i$ und alle anderen auftauchenden Mengen in $\mathcal{A}$ enthalten sind wegen Aufgabe 5., was sicher stellt, dass diese erlaubte Funktionsargumente für $\mathbb{P}$ sind.