Musterlösungen EWMS, Serie 5

FSU Jena

Prof. Neumann,
Jamal Drewlo, Stefan Engelhardt, Daniel Max

Aufgabe 15. Sei $n \in \mathbb{N}$ und definiere $\Omega_n := \{1, \dots, n\}$, $\mathbb{P}_n(\{k\}) = \frac{1}{n}$ für alle $k \in \Omega_n$. Des Weiteren sei $n = p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}$ die Primfaktorzerlegung von n in paarweise verschiedene Primzahlen $p_1, \dots, p_m$ und Potenzen $k_i \in \mathbb{N}$.

Wir betrachten die Ereignisse $A_i := \{p_i, 2p_i, \dots, n\}$ für $i \in \{1, \dots, m\}$. Offenbar enthält A_i jede natürliche Zahl kleiner oder gleich n, die durch p_i teilbar ist. Somit gilt $|A_i| = \frac{n}{p_i}$. Genau so ist in $A_i \cap A_j$ jedes $k \in \Omega_n$ enthalten, das sowohl durch p_i als auch p_j teilbar ist. Somit gilt für $1 \leq i, j \leq m$ mit $i \neq j$, dass $|A_i \cap A_j| = \frac{n}{p_i \cdot p_j}$. Analog erhalten wir, dass $|A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}| = \frac{n}{p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_k}}$ für alle paarweise verschiedenen Indizes $i_1, \dots, i_k$ für $1 \leq k \leq m$.

Es gilt also $\mathbb{P}(A_i) = \frac{1}{n}\frac{n}{p_i} = \frac{1}{p_i}$ und $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \frac{1}{n}\frac{n}{p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_k}} = \Pi_{j=1}^k \frac{1}{p_{i_j}}$. Somit erfüllen die Mengen $A_1, \dots, A_m$ die Definition von (vollständiger) stochastischer Unabhängigkeit.

Nun sei $B := \{k \in \Omega_n : \quad k \text{ ist zu } n \text{ teilerfremd}\}$. Da auf Grund der Konstruktion $B = A_1^c \cap \ldots \cap A_m^c$, wie im Hinweis gegeben, können wir verwenden, aus $A_1, \dots, A_m$ unabhängig auch folgt, dass $A_1^c, \dots, A_m^c$ unabhängig sind (siehe Lemma 4.4). Wir erhalten also

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(A_1^c \cap \ldots \cap A_m^c) \\
&= \mathbb{P}(A_1^c) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_m^c) \\
&= (1 - \mathbb{P}(A_1)) \cdot \ldots \cdot (1 - \mathbb{P}(A_m)) \\
&= (1 - \frac{1}{p_1}) \cdot \ldots \cdot (1 - \frac{1}{p_m}).
\end{aligned}$$

Da außerdem $\varphi(n) = |B|$ und $\mathbb{P}(B) = \frac{|B|}{n} = (1 - \frac{1}{p_1}) \cdot \ldots \cdot (1 - \frac{1}{p_m})$, folgt, dass
$\varphi(n) = n \cdot (1 - \frac{1}{p_1}) \cdot \ldots \cdot (1 - \frac{1}{p_m})$.

Aufgabe 16. (i) Es gibt mehrere Wege den Erwartungswert auszurechnen. Hier möchten wir die beiden folgenden präsentieren:

(a)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{k=0}^{n} k \mathbb{P}^X(X = k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} np \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} p^{(k-1)} (1-p)^{(n-1)-(k-1)} \\
&= np \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{(k-1)} (1-p)^{(n-1)-(k-1)}.
\end{aligned}$$

Mit einer Neudefinition von $m := n - 1$ und $l := k - 1$ ist es etwas einfacher zu sehen, dass $\binom{n-1}{k-1} p^{(k-1)}(1-p)^{(n-1)-(k-1)} = \binom{m}{l} p^l (1-p)^{m-l}$ wieder die Dichte einer

Binomialverteilten Zufallsvariable ist und somit aufsummiert 1 ergibt. Insgesammt ergibt sich also $\mathbb{E}[X] = np$.

(b) Eine binomialverteilte Zufallsvariable kann aufgefasst werden, als die Summe von unabhängigen Bernoulliverteilten Zufallsvariablen, also $X = \sum_{i=1}^{n} B_i$ mit $\mathbb{P}(B_i = 1) = p$ und $\mathbb{P}(B_i = 0) = 1 - p$. Wegen der Linearität des Erwartunswertes erhalten wir also $\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[B_i] = \sum_{i=1}^{n}(1 \cdot p + 0 \cdot (1-p)) = n \cdot p$.

(ii)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}^X(\{k\}) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} ke^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
(l := k-1) \quad &= \lambda\sum_{l=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^l}{l!} \\
&= \lambda.
\end{aligned}$$

Aufgabe 17. Gegeben: $\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(X = 1, Y = -1) = \frac{1}{3}$ und $\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = \frac{1}{3}$. Da dies ein vollständiges System darstellt, ergibt sich
$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) + \mathbb{P}(X = 1, Y = -1) = \frac{2}{3}$,
$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = \frac{1}{3}$,
$\mathbb{P}(Y = -1) = \mathbb{P}(Y = -1, X = 1) = \frac{1}{3}$,
$\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(Y = 0, X = 0) = \frac{1}{3}$ und
$\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(Y = 1, X = 1) = \frac{1}{3}$.
Es folgt, dass

$$\mathbb{E}[X] = 1 \cdot \mathbb{P}(X = 1) + 0 \cdot \mathbb{P}(X = 0) = \frac{2}{3}$$

und

$$\mathbb{E}[Y] = -1 \cdot \mathbb{P}(Y = -1) + 0 \cdot \mathbb{P}(Y = 0) + 1 \cdot \mathbb{P}(Y = 1) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0.$$

Des Weiteren haben wir

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(X, Y) &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] \\
&= (0 - \frac{2}{3})(0 - 0)\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) + (1 - \frac{2}{3})(-1 - 0)\mathbb{P}(X = 1, Y = -1) \\
&\qquad + (1 - \frac{2}{3})(1 - 0)\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) \\
&= 0 + \frac{1}{3} \cdot (-1) \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Nun noch zur Unabhängigkeit: $\mathbb{P}(X = 0) \cdot \mathbb{P}(Y = 0) = \frac{1}{3}\frac{1}{3} = \frac{1}{9} \neq \frac{1}{3} = \mathbb{P}(X = 0, Y = 0)$. X und Y sind also nicht unabhängig.

Aufgabe 18. Seien x_i für $i \in I$ alle Werte, die die Zufallsvariable X annehmen kann, sodass $\sum_{i\in I} \mathbb{P}(X = x_i) = 1$. Nach Definition ist $\mathbb{E}[(X-c)^2] = \sum_{i\in I}(x_i - c)^2 \cdot \mathbb{P}(X = x_i)$. Da dies ein nach c (beliebig oft) differenzierbarer Ausdruck ist und wir ein Minimum suchen, wenden wir die altbekannte Methode des Differenzierens und gleich Null Setzens an. (Hierbei übergehen wir, dass eigentlich noch gezeigt werden müsste, dass die Summe und die Differntation wirklich vertauscht werden können.) Es ergibt sich also

$$\begin{aligned}
\partial_c \, \mathbb{E}[(X-c)^2] &= \partial_c \sum_{i\in I}(x_i - c)^2 \cdot \mathbb{P}(X = x_i) \\
&= \sum_{i\in I} \partial_c (x_i - c)^2 \cdot \mathbb{P}(X = x_i) \\
&= \sum_{i\in I} -2(x_i - c) \cdot \mathbb{P}(X = x_i) \\
&= 2\left(c \sum_{i\in I} \mathbb{P}(X = x_i) - \sum_{i\in I} x_i \cdot \mathbb{P}(X = x_i)\right) \\
&= 2\,(c - \mathbb{E}[X])
\end{aligned}$$

und somit als Kandidat für das Minimum $c = \mathbb{E}[X]$. Da nach einer analogen Rechnung $\partial_c^2 \, \mathbb{E}[(X-c)^2] = 2 > 0$ ist, erhalten wir, dass dies tatsächlich ein Minimum ist. Da wir überall Differenzierbarkeit haben und nirgendwo sonst das Notwendige Kriterium erfüllt ist, muss dies auch das globale Minimum sein.

Als vollständig rigorosen Beweis, wenn man bereits vermutet, dass $\mathbb{E}[X]$ der Minimierer ist, kann man auch folgende Rechnung anführen:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(X-c)^2] &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X] - c)^2] \\
&= \mathbb{E}[X - \mathbb{E}[X])^2] + 2\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(\mathbb{E}[X] - c)] + \mathbb{E}[\mathbb{E}[X] - c] \\
&= \mathbb{E}[X - \mathbb{E}[X])^2] + 2(\mathbb{E}[X] - c)\mathbb{E}[X - \mathbb{E}[X]] + (\mathbb{E}[X] - c)^2 \\
&= \mathbb{E}[X - \mathbb{E}[X])^2] + (\mathbb{E}[X] - c)^2.
\end{aligned}$$

Da sowohl $\mathbb{E}[X - \mathbb{E}[X])^2] \geq 0$ und $(\mathbb{E}[X] - c)^2 \geq 0$ und letzteres genau dann gleich 0 ist, wenn $c = \mathbb{E}[X]$, erhalten wir, dass dies das Minimum darstellt.