Musterlösungen EWMS, Serie 8

FSU Jena

Prof. Neumann,
Jamal Drewlo, Stefan Engelhardt, Daniel Max

Bemerkung: Die Rechnungen in dieser Musterlösung sind sehr ausführlich um klar zu machen, was in den einzelnen Schritten passiert. Wirklich benötigt wird nur, dass der Rechenweg erkennbar ist. Nur die Hälfte der Zwischenschritte würde also ebenfalls vollkommen ausreichend sein.

Aufgabe 26. X ist exponentialverteilt, dh.

$$f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t} \mathbb{1}\{t \geq 0\} = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & \text{falls } t \geq 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(i)

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_X(t) \mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{x} \lambda e^{-\lambda t} \mathbb{1}\{t \geq 0\} \mathrm{d}t \\ &= \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t} \mathrm{d}t \mathbb{1}\{x \geq 0\} \\ &= [-e^{-\lambda t}]_0^x \mathbb{1}\{x \geq 0\} \\ &= (1 - e^{-\lambda x}) \mathbb{1}\{x \geq 0\} \end{aligned}$$

Es ist also $F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{falls } x \geq 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

(ii) Seien $s, t > 0$ beliebig. Da somit $\mathbb{1}\{t > 0\} = \mathbb{1}\{s > 0\} = \mathbb{1}\{t + s > 0\} = 1$, müssen wir die Indikatorfunktion in F_X nicht unbedingt mitschreiben.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > t + s | X > t) &= \frac{\mathbb{P}(X > t + s, X > s)}{\mathbb{P}(X > t)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X > t + s)}{1 - \mathbb{P}(X \leq t)} \\ &= \frac{1 - F_X(t + s)}{1 - F_X(t)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} \\ &= 1 - (1 - e^{-\lambda s}) \\ &= 1 - F_X(s) \\ &= \mathbb{P}(X > s). \end{aligned}$$

Aufgabe 27. X_1, X_2 seien unabhängige und auf $[0,1]$ gleichverteilte ZV. Zuerst eine kleine Nebenrechnung:

$$\mathbb{1}\{0 \le t - z \le 1\} = \mathbb{1}\{-t \le -z \le 1 - t\} = \mathbb{1}\{t - 1 \le z \le t\}.$$

Nach Satz 7.7 gilt

$$\begin{aligned}
f_{X_1+X_2}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(z) f_{X_2}(t-z)\mathrm{d}z \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}\{0 \le z \le 1\}\mathbb{1}\{0 \le t - z \le 1\}\mathrm{d}z \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}\{0 \le z \le 1\}\mathbb{1}\{t - 1 \le z \le t\}\mathrm{d}z \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}\{\max(0, t-1) \le z \le \min(1, t)\}\mathrm{d}z \\
&= \int_{\max(0,t-1)}^{\min(1,t)} 1\mathrm{d}z \cdot \mathbb{1}\{\max(0, t-1) \le \min(1, t)\} \\
&= \big(\min(1,t) - \max(0, t-1)\big) \cdot \mathbb{1}\{0 \le t \le 2\} \\
&= \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0, \\ x, & \text{falls } 0 \le x < 1 \\ 2 - x & \text{falls } 1 \le x < 2 \\ 0, & \text{falls } x \ge 2. \end{cases}
\end{aligned}$$

Aufgabe 28. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge unabhängier $Exp(\lambda)$ verteilter ZV mit $\lambda > 0$.

(i) Wir gehen über Induktion vor. Zuerst stellen wir fest, dass für $k = 1$ gilt

$$f_{\sum_{i=1}^k X_i}(x) = f_{X_1}(x) = e^{-\lambda x}\lambda^1 \frac{x^0}{0!}\mathbb{1}\{x \geq 0\} = e^{-\lambda x}\lambda^k \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\mathbb{1}\{x \geq 0\}.$$

Nun vollziehen wir den Induktionsschritt.

$$\begin{aligned}
f_{\sum_{i=1}^{k+1} X_i}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{\sum_{i=1}^k X_i}(z) f_{X_{k+1}}(x-z)\mathrm{d}z \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda z}\lambda^k \frac{z^{k-1}}{(k-1)!}\mathbb{1}\{z \geq 0\} e^{-\lambda(x-z)}\lambda \mathbb{1}\{x - z \geq 0\}\mathrm{d}z \\
&= \lambda^{k+1}e^{-\lambda x}\frac{1}{(k-1)!}\int_0^x z^{k-1}e^{-\lambda(z-z)}\mathrm{d}z \cdot \mathbb{1}\{x \geq 0\} \\
&= \lambda^{k+1}e^{-\lambda x}\frac{1}{(k-1)!}\left[\frac{z^k}{k}\right]_0^x \mathbb{1}\{x \geq 0\} \\
&= \lambda^{k+1}e^{-\lambda x}\frac{x^k}{k!}\mathbb{1}\{x \geq 0\},
\end{aligned}$$

was der Dichte behaupteten Dichte von $X_1 + \ldots + X_{k+1}$ entspricht.

(ii) Mit partieller Integration erhalten wir für beliebige $k \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(Z_t = k) \\
&= \mathbb{P}(X_1 + \ldots + X_k \leq t) - \mathbb{P}(X_1 + \ldots + X_{k+1} \leq t) \\
&= \int_{-\infty}^t f_{\sum_{i=1}^k X_i}(z)\mathrm{d}z - \int_{-\infty}^t f_{\sum_{i=1}^{k+1} X_i}(z)\mathrm{d}z \\
&= \int_{-\infty}^t \lambda^k e^{-\lambda z}\frac{z^{k-1}}{(k-1)!}\mathbb{1}\{z \geq 0\}\mathrm{d}z - \int_{-\infty}^t \lambda^{k+1}e^{-\lambda z}\frac{z^k}{(k)!}\mathbb{1}\{z \geq 0\}\mathrm{d}z \\
&= \int_0^t \lambda^k e^{-\lambda z}\frac{z^{k-1}}{(k-1)!}\mathrm{d}z\mathbb{1}\{t \geq 0\} - \left(\left[\lambda^{k+1}\frac{z^k}{k!}\frac{1}{-\lambda}e^{-\lambda z}\right]_0^t - \int_0^t -\lambda^k \frac{z^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda z}\mathrm{d}z\right)\mathbb{1}\{t \geq 0\} \\
&= \lambda^k \frac{t^k}{k!}e^{-\lambda t}\mathbb{1}\{t \geq 0\} \\
&= e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\mathbb{1}\{t \geq 0\}.
\end{aligned}$$

Somit ist $Z_t \sim Poisson(\lambda t)$ für alle $t \geq 0$.