Musterlösungen EWMS, Serie 11

FSU Jena

Prof. Neumann,
Jamal Drewlo, Stefan Engelhardt, Daniel Max

Aufgabe 32. Seien $(X_i)_{i=1,\dots,n}$ für $n \in \mathbb{N}$ Zufallsvariablen, die die Werte 0 und 1 annehmen können. Dabei gebe X_i den Erfolg im i-ten Experiment an, d.h. $\mathbb{P}(X_i = 1) = \theta \in [0,1]$. Des Weiteren sei $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. Dann ist offenbar

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\theta[X_i] &= 0 \cdot (1-\theta) + 1 \cdot \theta = \theta,\\
\mathbb{E}_\theta[X_i^2] &= 0^2 \cdot (1-\theta) + 1^2 \cdot \theta = \theta,\\
\mathbb{E}_\theta[\hat{\theta}] &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}_\theta[X_i] = \theta
\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\theta\left[(\hat{\theta}-\theta)^2\right] &= \mathbb{E}_\theta\left[\hat{\theta}^2 - 2\theta\hat{\theta} + \theta^2\right]\\
&= \mathbb{E}_\theta\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right)^2\right] - 2\theta\mathbb{E}_\theta\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right] + \theta^2\\
&= \mathbb{E}_\theta\left[\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1\wedge i\neq j}^n X_iX_j + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n X_i^2\right] - \theta^2\\
&\overset{X_i,X_j\,\text{unabhängig}}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1\wedge i\neq j}^n \mathbb{E}_\theta[X_i]\mathbb{E}_\theta[X_j] + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}_\theta[X_i^2] - \theta^2\\
&= \frac{n(n-1)}{n^2}\theta^2 + \frac{n}{n^2}\theta - \theta^2\\
&= \frac{1}{n}\theta(1-\theta).
\end{aligned}$$

Weil $\theta(1-\theta) \leq \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$, muss $n \geq 25$ sein, damit $\mathbb{E}_\theta\left[(\hat{\theta}-\theta)^2\right] \leq 0{,}01$ für alle möglichen θ.

Aufgabe 33. Sei $n = 2608$ und $X_1, \dots, X_n$ iid (independet and identically distributed = unabhängige, identisch verteilte) Zufallsvariablen mit $X_i \sim Pois(\lambda)$ für ein noch unbekanntes $\lambda > 0$. Weil alle Realisierungen $x_i \geq 0$ sind, können wir die Indikatorfunktion in den Wahrscheinlichkeiten weglassen. Wir erhalten also

$$L(\lambda, x) = \Pi_{i=1}^n \mathbb{P}_\lambda(X_i = x_i) = \Pi_{i=1}^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} = e^{-n\lambda} \lambda^{\sum_{i=1}^n x_i} \frac{1}{\Pi_{i=1}^n x_i!} = \frac{1}{\Pi_{i=1}^n x_i!} e^{\sum_{i=1}^n x_i \ln(\lambda) - \lambda}.$$

Da der ln streng monoton wachsend ist, erhält seine Anwendung die Position von Maxima. Wir betrachten also das leichter zu differenzierende

$$\partial_\lambda \ln(L(\lambda, x)) = \sum_{i=1}^n \partial_\lambda (x_i \ln(\lambda) - \lambda)) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\lambda} - 1.$$

Somit gilt $\partial_\lambda \ln(L(\lambda, x)) \stackrel{!}{=} 0$ ist äquivalent zu $\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i =: \hat{\lambda}$. Weil des Weiteren

$$\partial_\lambda^2 \ln(L(\hat{\lambda}, x)) = -\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\hat{\lambda}^2} < 0$$

liegt tatsächlich ein Maximum vor. $\hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{2608}(10097) = 3,87$.

Aufgabe 34. $X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} U[0, \theta]$. Dann ist

$$\begin{aligned} L(\theta, x) &= \Pi_{i=1}^n \frac{1}{\theta} \mathbb{1}\{x_i \in [0, \theta]\} \\ &= \theta^{-n} \mathbb{1}\{\{x_1, \dots, x_n\} \subset [0, \theta]\}. \end{aligned}$$

Weil diese Funktion nicht stetig ist und gerade die Unstetigkeitsstelle interessant ist, verzichten wir auf die Differentation und argumentieren. Auf Grund des Settings ist bekannt, dass für alle $x_i \geq 0$ gilt. Somit wird L nur Null, wenn für mindestens eines ein i gilt $x_i > \theta$. Um ein Maximum zu sein, ist es also zwingend notwendig, dass $\theta \geq \max\{x_1, \dots, x_n\}$. Da aber gleichzeitig θ^{-n} streng monoton fallend in θ ist, erhalten wir andererseits, dass θ möglichst klein sein sollte. Zusammen erhalten wir also, dass $\hat{\theta} = \max\{x_1, \dots, x_n\}$ die Likelyhood-Funktion maximiert und somit der gesuchte Schätzer ist.