

## Übungsaufgaben zur VL EWMS, Wintersemester 2020/21

Blatt 12, Abgabe: 10.02.2021, 10 Uhr

35. (1+2 Punkte)

Gegeben seien unabhängige Zufallsvariable  $X_1, \dots, X_n$ , wobei  $X_i \sim \mathcal{N}(\theta, 1)$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ . Betrachten Sie Schätzer  $\hat{\theta}$  der Form  $\hat{\theta} = \sum_{i=1}^n a_i X_i$ , wobei  $a_1, \dots, a_n$  reelle Zahlen sind.

- (i) Wie müssen  $a_1, \dots, a_n$  gewählt werden, damit  $\hat{\theta}$  ein erwartungstreuer Schätzer für  $\theta$  ist? ( $\hat{\theta}$  ist erwartungstreu, falls  $E_\theta \hat{\theta} = \theta$  für alle  $\theta \in \mathbb{R}$  gilt.)
- (ii) Durch welche Wahl der  $a_1, \dots, a_n$  wird  $E_\theta[(\hat{\theta} - \theta)^2]$  unter der Voraussetzung der Erwartungstreue minimiert?

*Hinweis: Es gilt  $\sum_{i=1}^n a_i^2 = \sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a}_n)^2 + n\bar{a}_n^2$ , wobei  $\bar{a}_n = (a_1 + \dots + a_n)/n$ .*

36. (2+1+2 Punkte)

Gegeben seien unabhängige Zufallsvariable  $X_1, \dots, X_n$  mit  $X_i \sim \text{Uniform}([0, \theta])$ ,  $\theta > 0$ .

- (i) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion und anschließend die Dichte der Zufallsvariable  $Y = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ !
- (ii) Wie muss  $c_n$  gewählt werden, damit  $\hat{\theta} = c_n Y$  ein erwartungstreuer Schätzer für  $\theta$  ist? ( $\hat{\theta}$  ist erwartungstreu, falls  $E_\theta \hat{\theta} = \theta$  für alle  $\theta > 0$  gilt.)
- (iii) Berechnen Sie den mittleren quadratischen Fehler  $E_\theta[(\hat{\theta} - \theta)^2]$  des erwartungstreuen Schätzers  $\hat{\theta} = c_n Y$ !