Übungsaufgaben zur VL EWMS, Wintersemester 2020/21
Blatt 4, Abgabe: 02.12.2020, 10 Uhr

12. (1+1+2+2 Punkte)

    In einem Unternehmen wird auf drei Maschinen das gleiche Erzeugnis hergestellt. Die Maschinen I und II produzieren je 20% der Gesamtproduktion, die Maschine III produziert 60% der Gesamtproduktion. Es ist bekannt, dass die Maschine I 3% Ausschuss, die Maschine II 5% Ausschuss und die Maschine III 4% Ausschuss produziert. Die hergestellten Erzeugnisse werden in einem Lager gesammelt.

    (i) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein im Lager zufällig ausgewähltes Erzeugnis ein Ausschussstück?

    (ii) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde ein solches Ausschussstück auf Maschine I, Maschine II bzw. Maschine III produziert?

    (iii) Für eine Untersuchung wird ein Ausschussstück benötigt, das auf Maschine III gefertigt wurde.
    Wie viele Erzeugnisse von Maschine III müssen der laufenden Produktion entnommen werden, damit sich mit mindestens 99% Wahrscheinlichkeit wenigstens ein Ausschussstück unter ihnen befindet? (Setzen Sie voraus, dass die Qualität der nacheinander produzierten Teile unabhängig ist!)

    (iv) Der laufenden Produktion werden regelmäßig Erzeugnisse entnommen und überprüft. Bei dieser Prüfung wird ein defektes Erzeugnis mit der Wahrscheinlichkeit von 99% als Ausschuss erkannt, aber auch ein einwandfreies Erzeugnis mit der Wahrscheinlichkeit von 3% irrtümlich für Ausschuss erklärt.
    Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein geprüftes Erzeugnis für Ausschuss erklärt? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von fünf Erzeugnissen, die der laufenden Produktion entnommen werden, wenigstens eines für Ausschuss erklärt wird?

    (Abiturprüfung 1994, Sachsen)

13. (2 Punkte)

    $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sei ein beliebiger Wahrscheinlichkeitsraum und $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ seien unabhängige Ereignisse.

    Zeigen Sie, dass $P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$ gilt!

14. (2 Punkte)

    Ω sei eine nichtleere Menge, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra in Ω und $X\colon\ \Omega \to \mathbb{R}$ eine beliebige Abbildung.

    Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}_X = \{B \subseteq \mathbb{R}\colon\ X^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ eine σ-Algebra in $\mathbb{R}$ ist!