Übungsaufgaben zur VL EWMS, Wintersemester 2020/21

Blatt 5, Abgabe: 09.12.2020, 10 Uhr

15. (3 Punkte)

    In der Zahlentheorie bezeichnet man als *Eulersche φ-Funktion* die Abbildung $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\varphi(1) = 1$ und $\varphi(n) =$ Anzahl der zu n teilerfremden Zahlen in $\Omega_n = \{1, \ldots, n\}$, falls $n \geq 2$.

    Zeigen Sie: Ist $n = p_1^{k_1} \cdots p_m^{k_m}$ die Primfaktorzerlegung von n in paarweise verschiedene Primzahlen $p_1, \ldots, p_m$ und Potenzen $k_i \in \mathbb{N}$, so gilt:

    $$\varphi(n) \;=\; n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_m}\right) .$$

    (*Hinweis: Betrachten Sie den W-Raum $(\Omega_n, 2^{\Omega_n}, P_n)$, wobei $P_n(\{k\}) = 1/n \ \forall k \in \Omega_n$. Zeigen Sie, dass die Ereignisse $A_1 := \{p_1, 2p_1, \ldots, n\}, \ldots, A_m := \{p_m, 2p_m, \ldots, n\}$ stochastisch unabhängig sind und nutzen Sie die Beziehung*
    $B := \{k \in \Omega_n\colon\ k \text{ ist zu } n \text{ teilerfremd}\} = A_1^c \cap \cdots \cap A_m^c$.)

16. (1+1 Punkte)

    Berechnen Sie den Erwartungswert für eine Zufallsvariable X mit folgenden Verteilungen:

    (i) X sei binomialverteilt mit Parametern n und p, d.h.,

    $$P^X(\{k\}) \;=\; \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} ,$$

    wobei $p \in [0, 1]$ und $k \in \{0, \ldots, n\}$,

    (ii) X sei poissonverteilt mit Parameter λ, d.h., $P^X(\{k\}) \;=\; e^{-\lambda}\lambda^k/k!$, wobei $\lambda \geq 0$ und $k \in \{0, 1, \ldots\}$!

17. (2 Punkte)

    Gegeben seien Zufallsvariable X und Y mit $P(\{\omega\colon\ X(\omega) = Y(\omega) = 1\}) = P(\{\omega\colon\ X(\omega) = -Y(\omega) = 1\}) = P(\{\omega\colon\ X(\omega) = Y(\omega) = 0\}) = 1/3$.

    Zeigen Sie, dass $\operatorname{cov}(X, Y) = 0$ ist, aber X und Y nicht unabhängig sind!

18. (1 Punkt)

    X sei eine diskrete Zufallsvariable auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $E[X^2] < \infty$.

    Für welches $c \in \mathbb{R}$ ist $E[(X-c)^2]$ minimal und wie groß ist dieses Minimum?