Übungsaufgaben zur VL EWMS, Wintersemester 2020/21

Blatt 6, Abgabe: 16.12.2020, 10 Uhr

19. (2+2 Punkte)

    (i) X sei eine diskrete Zufallsvariable auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Werten in $\mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass
    $$EX = \sum_{n=1}^{\infty} P(\{\omega \colon X(\omega) \geq n\})$$
    gilt!

    (ii) Es werden unabhängige Zufallsexperimente bis zum Erreichen des ersten Erfolges durchgeführt. Die Erfolgswahrscheinlichkeit beträgt jeweils $p \in (0,1)$. Die Zufallsvariable X nimmt den Wert k an, falls der erste Erfolg im k-ten Versuch eintritt.

    Bestimmen Sie $P(X = k)$ und den Erwartungswert von X!

20. (2 Punkte)

    Die Zufallsvariablen $X_1 \sim \text{Poisson}(\lambda_1)$ und $X_2 \sim \text{Poisson}(\lambda_2)$ seien stochastisch unabhängig. ($P(X_i = k) = e^{-\lambda_i} \lambda_i^k / k!$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$)

    Zeigen Sie, dass
    $$X_1 + X_2 = \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2)$$
    gilt!

21. (2 Punkte)

    Wir betrachten ein mit Gas gefülltes Gefäß. Es beinhaltet $n = 0,25 \cdot 10^{23}$ Moleküle. Die Bewegung der Gasmoleküle ist irregulär. Daher wird jedes Gasmolekül mit einer Wahrscheinlichkeit von $1/2$ in der linken bzw. rechten Hälfte sein, unabhängig von den anderen Molekülen.

    Treffen Sie eine Aussage darüber, mit welcher Wahrscheinlichkeit der Anteil der Moleküle in der linken Hälfte größer als $(1 + 10^{-8})/2$ ist!

    Hinweis: Nutzen Sie die Tschebyscheff-Ungleichung.

22. (1 Punkt)

    $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei eine Folge von diskreten Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und es gelte $E[|X_n|] \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$.

    Zeigen Sie, dass daraus $X_n \xrightarrow{P} 0$ folgt!