Übungsaufgaben zur VL EWMS, Wintersemester 2020/21
Blatt 7, Abgabe: 06.01.2021, 10 Uhr

23. (2 Punkte)

$(X_n)_{n=0,1,\dots}$ und $(Y_n)_{n=0,1,\dots}$ seien Folgen von diskreten Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $X_n \xrightarrow{P} X_0$ und $Y_n \xrightarrow{P} Y_0$.

Zeigen Sie, dass daraus

$$X_n + Y_n \xrightarrow{P} X_0 + Y_0$$

folgt!

24. (2 Punkte)

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge von nichtnegativen diskreten Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und es gelte $X_{n+1}(\omega) \le X_n(\omega) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall \omega \in \Omega$.

Zeigen Sie, dass aus $X_n \xrightarrow{P} 0$ auch $X_n \overset{P-f.s.}{\longrightarrow} 0$ folgt!

Hinweis: Es gilt $\{\omega \in \Omega\colon\ X_n(\omega) \not\longrightarrow 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n^{(k)}$, *wobei*
$B_n^{(k)} = \{\omega \in \Omega\colon\ X_m(\omega) \ge 1/k \quad \textit{für ein } m \ge n\} = \{\omega \in \Omega\colon\ X_n(\omega) \ge 1/k\}$.
(Die letzte Gleichheit gilt wegen $X_{n+1}(\omega) \le X_n(\omega)$.*)*

25. (2+2 Punkte)

Beim Roulette sind je 18 Zahlen rot bzw. schwarz gefärbt und eine Zahl (0) ist grün. Ein Spieler setzt stets auf *Rot* und er bekommt beim Gewinn den doppelten Einsatz ausbezahlt. Er wählt die „Verdoppelungsstrategie“, d.h., er setzt im k-ten Spiel einen Einsatz von 2^{k-1} Euro und bricht das Spiel ab, wenn er erstmals gewinnt.

(i) Nehmen Sie an, dass der Spieler unbegrenzte Geldreserven besitzt und das Casino ihn beliebig lange spielen lässt.

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass er irgendwann gewinnt und wie hoch ist sein Nettogewinn (Auszahlung minus gesamter Einsatz)?

(ii) Nehmen Sie jetzt an, dass der Spieler maximal K-mal spielen kann. (Falls er K-mal verliert, so verliert er seinen gesamten Einsatz; andernfalls bricht er nach seinen ersten Gewinn ab.)

Wie hoch ist der Erwartungswert seines Nettogewinns und wie verhält sich dieser Nettogewinn mit $K \to \infty$?