Übungsaufgaben zur VL EWMS, Wintersemester 2020/21
Blatt 8, Abgabe: 13.01.2021, 10 Uhr

26. (1+2 Punkte)

X sei eine exponentialverteilte Zufallsvariable, d.h., mit einer Dichte f, wobei (für $\lambda > 0$)

$$f(t) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda t}, & \text{falls } t \geq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(i) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion F von X!

(ii) Zeigen Sie die sogenannte Nichtalterungseigenschaft der Exponentialverteilung, d.h.,

$$P\,(X > t + s \mid X > t) = P\,(X > s) \qquad \forall s, t > 0\,!$$

27. (2 Punkte)

X_1 und X_2 seien stochastisch unabhängig und gleichverteilt auf dem Intervall $[0, 1]$.

Berechnen Sie die Dichte von $X_1 + X_2$!

28. (3+2 Punkte)

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit $X_n \sim Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$.

(i) Zeigen Sie, dass $X_1 + \cdots + X_k$ eine Dichte f mit

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\lambda x}\lambda^k \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}, & \text{falls } x \geq 0, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

hat!

(ii) Weiter sei $Z_t = \max\{n \geq 0\colon\ X_1 + \cdots + X_n \leq t\}$.
Zeigen Sie, dass $Z_t \sim \text{Poisson}(\lambda t)$ gilt!
Hinweis: Nutzen Sie, dass $P(Z_t = k) = P(X_1 + \cdots + X_k \leq t) - P(X_1 + \cdots + X_{k+1} \leq t)$ *gilt!*