

2. Übungsblatt

Ausgabetermin: 25.04.2022
Abgabetermin: 09.05.2022

Aufgabe 1.

Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Ereignissen. Man definiere für alle $n \in \mathbb{N}$

$$B_n := A_n \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \right).$$

Zeigen Sie, dass $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ und dass $B_n \cap B_m = \emptyset$, falls $m \neq n$.

Aufgabe 2.

In einer Urne befinden sich schwarze und weiße Kugeln. Sei $\alpha > 0$ das Verhältnis zwischen der Anzahl der schwarzen Kugeln und der Anzahl der weißen Kugeln. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass beim Ziehen (ohne Zurücklegen) aller Kugeln aus der Urne die letzte Kugel schwarz ist.

Aufgabe 3.

a) Seien $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ zwei σ -Algebren auf derselben Menge Ω . Sind die Familien

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 &= \{A \subseteq \Omega : A \in \mathcal{A}_1 \text{ und } A \in \mathcal{A}_2\}, \\ \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 &= \{A \subseteq \Omega : A \in \mathcal{A}_1 \text{ oder } A \in \mathcal{A}_2\},\end{aligned}$$

ebenfalls σ -Algebren?

b) Sei $\mathcal{A} := \{A \subseteq \mathbb{N} : A \text{ oder } A^c \text{ endlich}\}$. Ist $\mathcal{A}$ eine σ -Algebra auf $\mathbb{N}$?

🏠 **Aufgabe 4** (6 Punkte). Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

a) Gegeben seien die Wahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= 0,5; & \mathbb{P}(B) &= 0,25; & \mathbb{P}(C) &= 0,15; & \mathbb{P}(A \cap B) &= 0,125; \\ \mathbb{P}(A \cap C) &= 0,06; & \mathbb{P}(B \cap C) &= 0,075; & \mathbb{P}(A \cap B \cap C) &= 0,03.\end{aligned}$$

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse

- i) $A \setminus C$,
- ii) $A \cup B \cup C^c$,
- iii) $A^c \cap B^c \cap C$,
- iv) $(A^c \cap B^c) \cup C$.

b) Zeigen Sie für drei Ereignisse $A, B, C \in \mathcal{A}$, dass

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).$$

c) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A_i \in \mathcal{A}$, $1 \leq i \leq n$. Beweisen Sie, dass dann gilt:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n \left[(-1)^{k+1} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} \mathbb{P}(A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_k}) \right].$$

■ **Aufgabe 5** (3 Punkte).

Glücksspirale: Eine 7-stellige Glückszahl, bestehend aus den Ziffern $0, \dots, 9$, wird gezogen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für die Ziehung von '4444444' und die von '1234567', falls die Glückszahl ermittelt wird, indem

- a) aus einem Behälter mit 70 Kugeln (7 je Ziffer) nacheinander 7 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen werden;
- b) aus 7 Behältern mit je 10 Kugeln (1 je Ziffer) nacheinander je eine Kugel gezogen wird.

■ **Aufgabe 6** (3 Punkte).

Von drei Maschinen gleichen Typs werden von der ersten 20%, von der zweiten 30% und von der dritten 50% der Gesamtproduktion hergestellt. Erfahrungsgemäß entstehen bei der ersten Maschine 5%, bei der zweiten 4% und bei der dritten 2% fehlerhafte Produkte.

- a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein der Gesamtproduktion zufällig entnommenes Teil fehlerhaft?
- b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig gefundenes fehlerhaftes Produkt von der zweiten Maschine gefertigt wurde?
- c) Um die Qualität zu verbessern, soll die erste Maschine gegen eine neue Maschine mit gleicher Produktionskapazität ausgetauscht werden. Welche Fehlerquote darf die neue Maschine höchstens haben, damit die Gesamtfehlerwahrscheinlichkeit 2,5% nicht übersteigt?

Abgabetermin: Die mit ■ gekennzeichneten Aufgaben sind zu bearbeiten und bis zum angegebenen Termin in der Vorlesung abzugeben. Alternativ können Sie Ihre Lösungen auch in Moodle abgeben (eine pdf-Datei, max. 10 MB, bis 12:15 Uhr am 09.05.22). Es wird empfohlen auch die übrigen Aufgaben zu lösen.

Bedingung für die Teilnahme an der Klausur: 50% der Punkte aus den Übungsserien und mindestens einmaliges Vorrechnen in der Übung.