# Spezielle Kenngrößen von Zufallsvariablen

DIPLOMARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades
Diplom-Mathematiker

FRIEDRICH-SCHILLER-UNIVERSITÄT JENA
Fakultät für Mathematik und Informatik

eingereicht von Henning Kempka
geboren am 22.05.1979 in Jena

Betreuer: Prof. Dr. Joseph Mecke

Jena, den 16. August 2004

# Zusammenfassung

Es ist eine bekannte Tatsache der Wahrscheinlichkeitstheorie, daß das Verteilungsgesetz, einer beschränkten Zufallsgröße $\xi$, eindeutig durch die Folge ihrer Momente $\{\mathbb{E}\xi^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt ist. Dieses Resultat gilt leider nur für beschränkte Zufallsgrößen. 1953 konnte Wassily Hoeffding (siehe [7]) als stärkeres Resultat zeigen, daß das Verteilungsgesetz von einer Zufallsgröße $\xi$ mit erstem Moment eindeutig durch die Folge der Erwartungswerte der k-ten Ranggrößen $\{\mathbb{E}\xi^*_{k,n}\}_{n\in\mathbb{N}}^{k=1,\dots,n}$ bestimmt ist. Dabei sind $\xi_1, \xi_2, \dots$ unabhängig identisch gemäß $\mathrm{P}_\xi$ verteilt und für $n \in \mathbb{N}$ ist $\xi^*_{k,n}$ die k-te Ranggröße, mit $\xi^*_{1,n} \leq \cdots \leq \xi^*_{k-1,n} \leq \xi^*_{k,n} \leq \xi^*_{k+1,n} \leq \cdots \leq \xi^*_{n,n}$.
Dieses Resultat wurde dann später oft in der Statistik benutzt, zum Beispiel für Rangordnungstests, was nicht zuletzt die vielen Arbeiten darüber belegen(siehe zum Beispiel [4], [1]).
Ich werde in meiner Arbeit vornehmlich nur mit $\xi^*_{n,n} = \max\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ arbeiten. Dabei bezeichne ich $\beta_n = \mathbb{E}\max\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ als die Hoeffding-Koeffizienten . Diese sind ausreichend, das Verteilungsgesetz von $\xi$ zu charakterisieren. Weiterhin wird außerdem eine Umkehrformel für die Hoeffding-Koeffizienten bewiesen werden.
Die Arbeit von Hoeffding wurde 1987 von Richard A. Vitale auf Zufallsvariablen in Banachräumen verallgemeinert (siehe [8]). Ich werde im zweiten Kapitel seinen Ideen folgen, aber mich dabei nur auf den Fall von Zufallsvektoren im $\mathbb{R}^d$ beschränken.

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Eindimensionaler Fall

## 1.1 Hoeffding-Koeffizienten: Definition und Eigenschaften

**Allgemeines**

Es ist $[\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}]$ unser zu Grunde liegende Maßraum. Dabei ist $\Omega$ eine nichtleere Menge und $\mathcal{F}$ ist eine $\sigma$-Algebra über $\Omega$. Weiterhin ist $\mathcal{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathcal{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ mit $\mathcal{P}(\Omega) = 1$.
Eine Zufallsvariable $\xi$ mit Werten aus dem meßbaren Raum $[X, \mathcal{X}]$ ist eine $\mathcal{F}, \mathcal{X}$-meßbare Abbildung $\xi : \Omega \to X$. Dabei wird auf $[X, \mathcal{X}]$ das Bildmaß $\mathrm{P}_\xi : \mathcal{X} \to [0, 1]$ induziert, mit

$$\mathrm{P}_\xi(B) = \mathcal{P}\left(\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \in B\}\right) \quad \text{für beliebiges } B \in \mathcal{X}.$$

Man nennt dann $\mathrm{P}_\xi$ auch das Verteilungsgesetz von $\xi$.

**Definition 1.1** *Man sagt zwei Zufallsvariablen $\xi$ und $\eta$ seien* identisch verteilt, *wenn sie in den selben meßbaren Raum $[X, \mathcal{X}]$ abbilden und wenn gilt, daß*

$$\mathrm{P}_\xi(B) = \mathrm{P}_\eta(B) \quad \textit{für alle } B \in \mathcal{X}.$$

**Schreibweise:**

$$\xi \sim \eta \;:\Leftrightarrow\; \xi \text{ und } \eta \text{ sind identisch verteilt.}$$

Zufallsvariablen, für die gilt $[X, \mathcal{X}] = [\mathbb{R}, \mathcal{R}]$, heißen Zufallsgrößen. Das erste Kapitel befaßt sich ausschließlich mit Zufallsgrößen und das zweite Kapitel bezieht sich dann auf Zufallsvektoren, das heißt $[X, \mathcal{X}] = [\mathbb{R}^d, \mathcal{R}_d]$.

**Definition der Hoeffding-Koeffizienten**

Die Zufallsgrößen $\xi = \xi_1, \xi_2, \ldots$ seien unabhängig identisch gemäß dem Verteilungsgesetz $\mathrm{P}_\xi$ verteilt und besitzen einen Erwartungswert, also $\mathbb{E}|\xi| < \infty$. Sie besitzen die gemeinsame Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$, definiert durch

$$F(x) = \mathrm{P}_\xi((-\infty, x)) = \mathcal{P}(\xi \in (-\infty, x)) \; .$$

Nun bilden wir für ein $\omega \in \Omega$ und für ein $n \in \mathbb{N}$ die k-ten Ranggrößen $\xi^*_{k,n}$ für $k = 1, \ldots, n$. Dazu ordnen wir $\xi_1(\omega), \ldots, \xi_n(\omega)$ der Größe nach und erhalten

$$\xi^*_{1,n}(\omega) \leq \cdots \leq \xi^*_{k-1,n}(\omega) \leq \xi^*_{k,n}(\omega) \leq \xi^*_{k+1,n}(\omega) \leq \cdots \leq \xi^*_{n,n}(\omega) \; .$$

Wie sind die $\xi^*_{k,n}$ für $k = 1, \ldots, n$ verteilt?
Wir beginnen zunächst mit der Verteilungsfunktion $B_n$ von $\max\{\xi_1, \ldots, \xi_n\} = \xi^*_{n,n}$:

$$\begin{aligned} B_n(x) &= \mathcal{P}\left(\max\{\xi_1, \ldots, \xi_n\} < x\right) \\ &= \mathcal{P}(\xi_1 < x, \ldots, \xi_n < x) \; . \end{aligned}$$

Anschließend nutzt man die Unabhängigkeit der $\xi, \ldots, \xi_n$ aus und erhält

$$\begin{aligned} B_n(x) &= \mathcal{P}(\xi_1 < x) \cdots \mathcal{P}(\xi_n < x) \\ &= (F(x))^n \ . \end{aligned}$$

Auf dieselbe Art läßt sich die Verteilungsfunktion $A_n$ von $\min\{\xi_1, \ldots, \xi_n\} = \xi^*_{1,n}$ ableiten:

$$\begin{aligned} A_n(x) &= \mathcal{P}\left(\min\{\xi_1, \ldots, \xi_n\} < x\right) \\ &= 1 - \mathcal{P}\left(\min\{\xi_1, \ldots, \xi_n\} \geq x\right) \\ &= 1 - \mathcal{P}(\xi_1 \geq x, \ldots, \xi_n \geq x) \ . \end{aligned}$$

Auch hier wird die Unabhängigkeit der $\xi, \ldots, \xi_n$ verwendet und erhält

$$\begin{aligned} A_n(x) &= 1 - \mathcal{P}(\xi_1 \geq x) \cdots \mathcal{P}(\xi_n \geq x) \\ &= 1 - (1 - F(x))^n \ . \end{aligned}$$

Schließlich haben wir die Verteilungsfunktionen der ersten und der letzten Ranggröße berechnet. Damit haben wir die Verteilungsgesetze von $\xi^*_{1,n}$ und $\xi^*_{n,n}$ in der Hand. Wie im Folgenden gezeigt wird, reicht sogar das Verteilungsgesetz von $\xi^*_{n,n}$ aus, um die Verteilungsgesetze der restlichen Ranggrößen zu beschreiben. Dazu errechnen wir die Verteilungsfunktion von $\xi^*_{k,n}$:

$$\begin{aligned} B_{k,n}(x) &:= F_{\xi^*_{k,n}}(x) = \mathcal{P}(\xi^*_{k,n} < x) \\ &= \mathcal{P}(\text{mindestens } k \text{ der } \xi\text{'s sind kleiner als } x) \\ &= \sum_{l=k}^{n} \mathcal{P}(\text{genau } l \text{ der } \xi\text{'s sind kleiner als } x) \ . \end{aligned}$$

Da die $\xi_i$ unabhängig und identisch verteilt sind, folgt mit $p := F(x) = \mathcal{P}(\xi < x)$

$$\begin{aligned} B_{k,n}(x) &= \sum_{l=k}^{n} \binom{n}{l} p^l (1-p)^{n-l} \\ &= \sum_{l=k}^{n} \binom{n}{l} p^l \sum_{m=0}^{n-l} \binom{n-l}{m} (-p)^m \\ &= \sum_{l=k}^{n} \sum_{m=0}^{n-l} \binom{n}{l} \binom{n-l}{m} (-1)^m p^{l+m} \\ &= \sum_{l=k}^{n} \sum_{m=0}^{n-l} \binom{n}{l} \binom{n-l}{m} (-1)^m (F(x))^{l+m} \\ &= \sum_{l=k}^{n} \sum_{m=0}^{n-l} \binom{n}{l} \binom{n-l}{m} (-1)^m B_{l+m}(x) \ . \end{aligned}$$

Also wissen wir, daß die Verteilungsfunktion der k-ten Ranggröße $\xi_{k,n}^*$ durch die Verteilungsfunktion der letzten Ranggröße berechnet werden kann.
Wassily Hoeffding hat 1953 gezeigt (vergleiche [7]), daß das Verteilungsgesetz einer Zufallsgröße $\xi$ mit Erwartungswert durch die Folge der Erwartungswerte der k-ten Ranggrößen $\{\mathbb{E}\xi_{k,n}^*\}_{n\in\mathbb{N}}^{k=1,\ldots,n}$ eindeutig bestimmt ist. Wir beschränken uns hier nur auf die letzte Ranggröße $\xi_{n,n}^*$ und nennen ihren Erwartungswert W. Hoeffding zu Ehren Hoeffding-Koeffizienten .

**Definition 1.2 (Hoeffding-Koeffizienten)** *Gegeben sei eine Zufallsgröße $\xi$ mit $\mathbb{E}|\xi| < \infty$. Dann nennen wir die Größe*

$$\beta_n = \mathbb{E}\max\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$$

Hoeffding-Koeffizient *$n$-ter Ordnung von $\xi$. Dabei sind die $\xi = \xi_1, \xi_2, \ldots$ unabhängig, identisch gemäß $\mathrm{P}_\xi$ verteilt.*

**Bemerkung 1:**

(a) Die $\beta_n$ sind alle endlich, da für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}\beta_n &= \mathbb{E}\max\{\xi_1, \ldots, \xi_n\} \le \mathbb{E}(|\xi_1| + \cdots + |\xi_n|)\\ &= \mathbb{E}|\xi_1| + \cdots + \mathbb{E}|\xi_n| = n\mathbb{E}|\xi| < \infty \ ,\end{aligned}$$

da der Erwartungswert linear ist und $\xi$ einen Erwartungswert besitzt.

(b) Gelegentlich bezeichne ich die $\alpha_n = \mathbb{E}\min\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ auch als Hoeffding-Koeffizienten. Diese lassen sich dann aber, wie wir gleich sehen werden, ganz einfach in die $\beta_n$ umrechnen. Somit entsteht zwar eine gewisse Redundanz, da die $\beta_n$ schon ausreichen das Verteilungsgesetz zu charakterisieren, aber manche Sätze lassen sich so kompakter darstellen.

**Lemma 1.1** *Es sei $\xi$ eine Zufallsgröße mit $\mathbb{E}|\xi| < \infty$, dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $k = 1, \ldots, n$*

$$\mathbb{E}\xi_{k,n}^* = \sum_{l=k}^{n} \sum_{m=0}^{n-l} \binom{n}{l} \binom{n-l}{m} (-1)^m \beta_{l+m} \tag{1.1}$$

$$\alpha_n = \sum_{l=1}^{n} \binom{n}{l} (-1)^{l+1} \beta_l \tag{1.2}$$

$$\beta_n = \sum_{l=1}^{n} \binom{n}{l} (-1)^{l+1} \alpha_l \ . \tag{1.3}$$

**Beweis:** Von oben wissen wir, daß gilt

$$B_{k,n}(x) = \sum_{l=k}^{n} \sum_{m=0}^{n-l} \binom{n}{l} \binom{n-l}{m} (-1)^m B_{l+m}(x) \ .$$

Weiterhin wissen wir

$$\begin{aligned}
A_n(x) &= 1 - (1 - F(x))^n \\
&= 1 - \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} (-F(x))^l 1^{n-l} \\
&= \sum_{l=1}^{n} \binom{n}{l} (-1)^{l+1} (F(x))^l \\
&= \sum_{l=1}^{n} \binom{n}{l} (-1)^{l+1} B_l(x)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
B_n(x) &= (F(x))^n \\
&= (1 + (F(x) - 1))^n - 0 \\
&= \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} (F(x) - 1)^l - \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} (-1)^l \\
&= \sum_{l=1}^{n} \binom{n}{l} (-1)^l (1 - F(x))^l - \sum_{l=1}^{n} \binom{n}{l} (-1)^l \\
&= -\sum_{l=1}^{n} \binom{n}{l} (-1)^{l+1} (1 - F(x))^l + \sum_{l=1}^{n} \binom{n}{l} (-1)^{l+1} \\
&= \sum_{l=1}^{n} \binom{n}{l} (-1)^{l+1} \left(1 - (1 - F(x))^l\right) \\
&= \sum_{l=1}^{n} \binom{n}{l} (-1)^{l+1} A_l(x) \ .
\end{aligned}$$

Bei den Umformungen wurde öfters der binomische Satz $(a+b)^n = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} a^l b^{n-l}$ benutzt. Den Erwartungswert einer Zufallsgröße kann man durch die Verteilungsfunktion mit Hilfe des Stieltjes-Integrals (siehe zum Beispiel [6] Seite 137 ff. und 146) darstellen:

$$\mathbb{E}\xi = \int_{\mathbb{R}} x \mathrm{P}_\xi(dx) \ .$$

Wenn $\xi$ die Verteilungsfunktion $F_\xi : \mathbb{R} \to [0,1]$ besitzt, so schreiben wir für den Erwartungswert auch

$$\mathbb{E}\xi = \int_{\mathbb{R}} x dF_\xi(x) \ .$$

Das Stieltjes-Integral ist linear in der Verteilungsfunktion (siehe [6] Seite 140) und somit gilt

$$\mathbb{E}\xi^*_{k,n} = \int_{\mathbb{R}} x dB_{k,n}(x) \ .$$

Wir setzen $B_{k,n}(x) = \sum_{l=k}^{n} \sum_{m=0}^{n-l} \binom{n}{l}\binom{n-l}{m}(-1)^m B_{l+m}(x)$ ein und erhalten

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\xi^*_{k,n} &= \int_{\mathbb{R}} x d\left(\sum_{l=k}^{n}\sum_{m=0}^{n-l}\binom{n}{l}\binom{n-l}{m}(-1)^m B_{l+m}(x)\right)\\
&= \sum_{l=k}^{n}\sum_{m=0}^{n-l}\binom{n}{l}\binom{n-l}{m}(-1)^m \int_{\mathbb{R}} x dB_{l+m}(x)\\
&= \sum_{l=k}^{n}\sum_{m=0}^{n-l}\binom{n}{l}\binom{n-l}{m}(-1)^m \beta_{l+m}
\end{aligned}$$

und auf demselben Weg bekommen wir

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= \sum_{l=1}^{n}\binom{n}{l}(-1)^{l+1}\beta_l\\
\beta_n &= \sum_{l=1}^{n}\binom{n}{l}(-1)^{l+1}\alpha_l \ .
\end{aligned}$$

□

Somit haben wir gezeigt, daß man mit Hilfe der $\beta_n$ mit Formel (1.1) alle anderen Erwartungswerte der Ranggrößen $\mathbb{E}\xi^*_{k,n}$ berechnen kann. Außerdem erhalten wir mit (1.3) aus den $\alpha_n$ sofort die $\beta_n$ einer Zufallsgröße.

### Eigenschaften

Nachdem die Hoeffding-Koeffizienten einmal definiert sind, lassen sich sofort ein paar einfache Resultate direkt aus der Definition ableiten.

**Lemma 1.2** *Es sei $\xi$ eine Zufallsgröße mit $\mathbb{E}|\xi| < \infty$. Dann gilt*

$$\begin{aligned}
-\infty < \mathbb{E}\xi = \beta_1 \leq \beta_2 \leq \beta_3 \leq \cdots < \infty \ ,\\
\infty > \mathbb{E}\xi = \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3 \geq \cdots > -\infty \ .
\end{aligned}$$

*Dabei sind $\xi = \xi_1, \xi_2, \ldots$ unabhängig identisch gemäß $\mathrm{P}_\xi$ verteilt und $\alpha_n, \beta_n$ die Hoeffding-Koeffizienten von $\xi$.*

**Beweis:** Zunächst setzen wir für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\eta_n &= \max\{\xi_1, \dots, \xi_n\} \quad \text{und} \\ \zeta_n &= \min\{\xi_1, \dots, \xi_n\} \ .\end{aligned}$$

Dann gilt natürlich $\eta_1 = \xi = \zeta_1$ und

$$\eta_n = \max\{\xi_1, \dots, \xi_n\} \le \max\{\xi_1, \dots, \xi_n, \xi_{n+1}\} = \eta_{n+1} \le \sum_{i=1}^{n+1} |\xi_i| \ ,$$

und analog erhält man

$$\sum_{i=1}^{n} |\xi_i| \ge \zeta_n = \min\{\xi_1, \dots, \xi_n\} \ge \min\{\xi_1, \dots, \xi_n, \xi_{n+1}\} = \zeta_{n+1} \ .$$

Aus der Monotonie und der Linearität des Erwartungswertes folgt

$$\mathbb{E}\xi = \beta_1 \le \beta_n = \mathbb{E}\eta_n \le \mathbb{E}\eta_{n+1} = \beta_{n+1} \le \mathbb{E} \sum_{i=1}^{n+1} \xi_i \le (n+1)\mathbb{E}|\xi| < \infty \ ,$$

da die $\xi_i$ identisch verteilt sind. Und es läßt sich schließen

$$\mathbb{E}\xi = \alpha_1 \ge \alpha_n = \mathbb{E}\zeta_n \ge \mathbb{E}\zeta_{n+1} = \alpha_{n+1} \ .$$

Weiterhin gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}-\alpha_n &= -\mathbb{E}\min\{\xi_1, \dots, \xi_n\} \\ &= \mathbb{E}\max\{-\xi_1, \dots, -\xi_n\} \\ &\le \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}| - \xi_i| = n\mathbb{E}|\xi| < \infty \ ,\end{aligned}$$

also $\alpha_n > -\infty$. Somit gilt insgesamt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$-\infty < \alpha_n \le \alpha_{n-1} \le \cdots \le \alpha_1 = \mathbb{E}\xi = \beta_1 \le \cdots \le \beta_{n-1} \le \beta_n < \infty \ . \tag{1.4}$$

$\square$

**Lemma 1.3** *Es sei $\xi$ eine Zufallsgröße mit Verteilungsdichte $p : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ und $\mathbb{E}|\xi| < \infty$. Dann besitzt $\zeta_n = \min\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ eine Verteilungsdichte $p_n : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ und $\eta_n = \max\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ eine Verteilungsdichte $q_n : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, gegeben durch*

$$p_n(x) = np(x)(1 - F(x))^{n-1} \quad \textit{und} \tag{1.5}$$

$$q_n(x) = np(x)(F(x))^{n-1} \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}. \tag{1.6}$$

**Beweis:** Von oben wissen wir, daß $\eta_n$ die Verteilungsfunktion $B_n(x) = (F(x))^n$ und $\zeta_n$ die Verteilungsfunktion $A_n(x) = 1 - (1 - F(x))^n$ besitzt. Nun bringt uns differenzieren mit Hilfe der Kettenregel zum Ziel.

□

**Lemma 1.4** *Es sei $\xi$ eine Zufallsgröße mit $\mathbb{E}|\xi| < \infty$ und $\xi$ besitze die Hoeffding-Koeffizienten $\beta_n$ und $\alpha_n$. Es sei $a \geq 0$ und $b \in \mathbb{R}$, dann besitzt $\mu = a\xi + b$ die Hoeffding-Koeffizienten $\tilde{\beta}_n$ und $\tilde{\alpha}_n$ welche bestimmt sind durch*

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}_n &= a\beta_n + b \\ \tilde{\alpha}_n &= a\alpha_n + b \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

**Beweis:** Wir führen den Beweis nur für $\tilde{\beta}_n$, da er aus Analogiegründen dann auch für $\tilde{\alpha}_n$ gilt. Es seien $\tilde{\beta}_n$ die Hoeffding-Koeffizienten für $\mu = a\xi + b$ und $\xi$ besitze die Hoeffding-Koeffizienten $\beta_n$, dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}_n &= \mathbb{E}\max\{\mu_1, \ldots, \mu_n\} = \mathbb{E}\max\{a\xi_1 + b, \ldots, a\xi_n + b\} \\ &= \mathbb{E}(\max\{a\xi_1, \ldots, a\xi_n\} + b) = \mathbb{E}(a\max\{\xi_1, \ldots, \xi_n\} + b) \\ &= a\mathbb{E}\max\{\xi_1, \ldots, \xi_n\} + b \\ &= a\beta_n + b\ .\end{aligned}$$

Dabei folgte der vorletzte Schritt aus der Linearität des Erwartungswertes.

□

**Lemma 1.5** *Es sei $\xi$ eine Zufallsgröße mit $\mathbb{E}|\xi| < \infty$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$*

$$\alpha_n = \int_0^\infty (1 - F(x))^n dx - \int_{-\infty}^0 (1 - (1 - F(x))^n)\, dx \tag{1.7}$$

$$\beta_n = \int_0^\infty (1 - (F(x))^n)\, dx - \int_{-\infty}^0 (F(x))^n dx\ , \tag{1.8}$$

*und falls $\xi$ eine Verteilungsdichte $p : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ besitzt, dann gilt*

$$\alpha_n = n \int_{-\infty}^\infty xp(x)(1 - F(x))^{n-1} dx \tag{1.9}$$

$$\beta_n = n \int_{-\infty}^\infty xp(x)(F(x))^{n-1} dx\ . \tag{1.10}$$

**Beweis:** Für Zufallsgrößen $\xi$ mit Erwartungswert und Verteilungsfunktion $F(x)$ gilt diese spezielle Erwartungswertformel (siehe [6] Seite 146)

$$\mathbb{E}\xi = \int_0^\infty (1 - F(x))dx - \int_{-\infty}^0 F(x)dx \ .$$

Also gilt jetzt für die Zufallsgrößen $\eta_n = \max\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ mit Verteilungsfunktion $B_n(x) = (F(x))^n$:

$$\begin{aligned}\beta_n = \mathbb{E}\eta_n &= \int_0^\infty (1 - B_n(x))dx - \int_{-\infty}^0 B_n(x)dx \\ &= \int_0^\infty \left(1 - (F(x))^n\right) dx - \int_{-\infty}^0 (F(x))^n dx\end{aligned}$$

und $\zeta_n = \min\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ mit Verteilungsfunktion $A_n(x) = 1 - (1 - F(x))^n$:

$$\begin{aligned}\alpha_n = \mathbb{E}\zeta_n &= \int_0^\infty (1 - A_n(x))dx - \int_{-\infty}^0 A_n(x)dx \\ &= \int_0^\infty (1 - F(x))^n dx - \int_{-\infty}^0 \left(1 - (1 - F(x))^n\right) dx \ .\end{aligned}$$

Die Formeln (1.9) und (1.10) folgen direkt aus Lemma 1.3, indem man einfach die Erwartungswertformel für Zufallsgrößen mit Verteilungsdichte anwendet.

$\square$

Da für nicht negative Zufallsgrößen gilt $F(x) = 0$ für alle $x \leq 0$ und sich die Nichtnegativität auch auf die $\eta_n$ und $\zeta_n$ überträgt, erhalten wir sofort:

**Folgerung 1** *Es sei $\xi$ eine nicht negative Zufallsgröße mit $\mathbb{E}|\xi| < \infty$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$*

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \int_0^\infty (1 - F(x))^n dx \\ \beta_n &= \int_0^\infty \left(1 - (F(x))^n\right) dx \ .\end{aligned}$$

## 1.2 Beweis der Eindeutigkeit

Wenn für zwei Zufallsgrößen $\xi$ und $\eta$ und die dazugehörigen Hoeffding-Koeffizienten $\beta_n^\xi$ und $\beta_n^\eta$ gilt

$$\beta_n^\xi = \beta_n^\eta \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

dann folgt $\xi \sim \eta$. Bis jetzt wurde das nur gesagt und nicht bewiesen und immer nur auf die Arbeit von W.Hoeffding [7] verwiesen. Nun wollen wir einen eigenen kleinen Beweis der Eindeutigkeit bringen[1].

Für jede Zufallsgröße $\xi$ kann man die Verteilungsfunktion $F_\xi : \mathbb{R} \to [0,1]$ angeben, welche die Zufallsgröße eindeutig bestimmt. Andererseits kann man zu einer Zufallsgröße $\xi$ auch eine Pseudoinverse Verteilungsfunktion $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ angeben, für die gilt $h(\gamma) \sim \xi$, dabei ist $\gamma$ gleichverteilt in $[0,1]$. Nun sind zwei Zufallsgrößen $\xi$ und $\eta$ identisch verteilt, wenn für ihre Pseudoinversen $h$ und $h'$ gilt $h(x) = h'(x)$ fast überall.

**Satz 1.1 (Eindeutigkeitssatz)** *Zwei Zufallsgrößen $\xi$ und $\eta$ mit $\mathbb{E}|\xi|, \mathbb{E}|\eta| < \infty$ sind genau dann identisch verteilt, wenn für ihre Hoeffding-Koeffizienten gilt*

$$\beta_n^\xi = \beta_n^\eta \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

**Beweis:** Es habe $\xi$ die Pseudoinverse $h$ und $\eta$ die Pseudoinverse $h'$. Außerdem seien noch $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ unabhängig identisch gleichverteilt in $[0,1]$. Dann gilt

$$\begin{aligned} h(\gamma_k) &\sim \xi_k \quad \text{und} \\ h'(\gamma_k) &\sim \eta_k \ . \end{aligned}$$

Nun sind die $\xi_1, \xi_2, \ldots$ unabhängig identisch gemäß $\mathrm{P}_\xi$ und die $\eta_1, \eta_2, \ldots$ unabhängig identisch gemäß $\mathrm{P}_\eta$ verteilt.

Wir widmen uns nur der nichttrivialen Rückrichtung des Satzes. Es gilt

$$\begin{aligned} \beta_n^\xi &= \mathbb{E} \max\{\xi_1, \ldots, \xi_n\} = \mathbb{E} \max\{h(\gamma_1), \ldots, h(\gamma_n)\} \\ &= \mathbb{E} h(\max\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}) \ , \end{aligned}$$

da die Pseudoinverse monoton ist. Weiterhin gilt für die $\eta_i$'s

$$\begin{aligned} \beta_n^\eta &= \mathbb{E} \max\{\eta_1, \ldots, \eta_n\} = \mathbb{E} \max\{h'(\gamma_1), \ldots, h'(\gamma_n)\} \\ &= \mathbb{E} h'(\max\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}) \ . \end{aligned}$$

Nun kennen wir aber nach Lemma 1.3 auf Seite 10 die Verteilungsdichte von $\max\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ und diese ist $q_n(x) = n\mathrm{I}_{[0,1]}(x)x^{n-1}$. Also ergibt sich insgesamt aus $\beta_n^\xi = \beta_n^\eta$ für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} h(\max\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}) &= \mathbb{E} h'(\max\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}) \ , \text{ also} \\ \int_0^1 h(x) x^{n-1} dx &= \int_0^1 h'(x) x^{n-1} dx \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

[1] Diese Beweismethode ist zum Beispiel auch in [1] auf Seite 144 zu finden.

Somit gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ letztendlich

$$\int_0^1 (h(x) - h'(x))x^{n-1}dx = 0 \ .$$

Da die Polynome in $(0,1)$ vollständig sind, gilt also $h(x) - h'(x) = 0$ fast überall und das heißt soviel wie $\eta \sim \xi$.

$\square$

Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu$ auf $[\mathbb{R}, \mathcal{R}]$ bestimmt eindeutig eine Verteilungsfunktion und damit auch die Pseudoinverse Verteilungsfunktion $h$. Somit kann man die Hoeffding-Koeffizienten auch einfach für Wahrscheinlichkeitsmaße über

$$\beta_n = n \int_0^1 h(x)x^{n-1}dx \quad \text{definieren.}$$

## 1.3 Beispiele

Im Folgenden sollen für wichtige Beispiele die Hoeffding-Koeffizienten ausgerechnet werden.

### 1.3.1 Gleichverteilungen

Es sei $\gamma$ eine auf $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsgröße. Diese hat die Verteilungsdichte $p_\gamma(x) = \mathrm{I}_{[0,1]}(x)$, die Verteilungsfunktion $F_\gamma(x) = x$ für $0 \leq x \leq 1$ und besitzt bekanntermaßen den Erwartungswert von $1/2$. Nun berechnen wir die Hoeffding-Koeffizienten über Formel (1.10)

$$\begin{aligned}
\beta_n &= \mathbb{E} \max\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\} \\
&= \int_{\mathbb{R}} x q_n(x) dx \\
&= \int_0^1 x n x^{n-1} dx \\
&= n \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \\
&= \frac{n}{n+1} \ .
\end{aligned}$$

Die $\alpha_n$ wollen wir auf andere Weise berechnen. Wir nutzen dabei aus, daß $\gamma$ nicht negativ ist, denn somit ist auch $\min\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ nicht negativ. Dann gilt mit der

Erwartungswertformel für nicht negative Zufallsgrößen von Folgerung 1

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \mathbb{E}\min\{\gamma_1,\dots,\gamma_n\} \\ &= \int_0^\infty (1-F(x))^n dx \\ &= \int_0^\infty \left(\mathcal{P}(\gamma \geq x)\right)^n dx \ .\end{aligned}$$

Also haben wir mit der Verteilungsfunktion $F(x) = x$ für $x \in [0,1]$

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \int_0^1 (1-x)^n dx \\ &= \left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{n+1} \ .\end{aligned}$$

Damit ergibt sich folgender

**Satz 1.2** *Es sei $\xi$ in $[a,b]$ gleichverteilt, mit $a,b \in \mathbb{R}$ und $a < b$. Dann gilt für die Hoeffding-Koeffizienten von $\xi$ für alle $n \in \mathbb{N}$*

$$\begin{aligned}\beta_n &= \frac{a}{n+1} + b\frac{n}{n+1} \\ \alpha_n &= a\frac{n}{n+1} + \frac{b}{n+1} \ .\end{aligned}$$

**Beweis:** Dies folgt aus der Darstellung

$$\xi = (b-a)\gamma + a$$

mit $\gamma$ gleichverteilt in $[0,1]$ und der Anwendung von Lemma 1.4 auf Seite 11.

□

### 1.3.2 Exponentialverteilungen

Es sei $\xi$ eine exponentialverteilte Zufallsgröße mit Parameter $\lambda > 0$. Dann besitzt $\xi$ die Verteilungsdichte $p : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ gegeben durch

$$p(x) = \mathrm{I}_{[0,\infty)}(x)\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$$

und $\xi$ hat die Verteilungsfunktion

$$F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} \quad \text{für } x \geq 0.$$

Somit ist $\xi$ also positiv und wir können Folgerung 1 anwenden, um vorerst die $\alpha_n$ zu berechnen:

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \mathbb{E}\min\{\xi_1,\ldots,\xi_n\}\\ &= \int\limits_0^\infty (1-F(x))^n dx\\ &= \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda n x} dx\\ &= \left[-\frac{\mathrm{e}^{-\lambda n x}}{\lambda n}\right]_0^\infty = \frac{1}{\lambda n}\ .\end{aligned}$$

Nach Gleichung (1.3) in Lemma 1.1 auf Seite 7 gilt jetzt für die $\beta_n$

$$\begin{aligned}\beta_n &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k}(-1)^{k+1}\alpha_k\\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k}(-1)^{k+1}\frac{1}{\lambda k}\\ &= \frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^n \binom{n}{k}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}\ .\end{aligned}$$

Um $\beta_n$ vereinfachter darzustellen, benötigen wir folgendes

**Lemma 1.6** *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\ .$$

**Beweis:** Durch die Gleichung $1/k = \int_0^1 x^{k-1}dx$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \binom{n}{k}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k}(-1)^{k+1}\int\limits_0^1 x^{k-1}dx\\ &= -\int\limits_0^1 \sum_{k=1}^n \binom{n}{k}(-1)^k x^{k-1}dx\\ &= -\int\limits_0^1 \frac{1}{x}\left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k}(-1)^k x^k\right)dx\\ &= -\int\limits_0^1 \frac{1}{x}\left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(-x)^k - 1\right)dx\\ &= -\int\limits_0^1 \frac{1}{x}((1-x)^n-1)dx\ .\end{aligned}$$

Die Substitution $y = 1 - x \Rightarrow \frac{dx}{dy} = -1$ führt uns zu:

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = \int\limits_0^1 \frac{1 - y^n}{1 - y} dy \ .$$

Benutzt man: $(y-1)(1 + y + y^2 + \ldots + y^{n-1}) = (1 - y^n)$ erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} &= \int\limits_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} y^k dy \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left[ \frac{y^{k+1}}{k+1} \right]_0^1 \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \ .
\end{aligned}$$

□

Es ergibt sich folgender Satz für die Hoeffding-Koeffizienten der Exponentialverteilung

**Satz 1.3** *Es sei $\xi$ eine exponentialverteilte Zufallsgröße mit Parameter $\lambda > 0$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$*

$$\alpha_n = \frac{1}{\lambda n} \quad \textit{und} \tag{1.11}$$

$$\beta_n = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \ . \tag{1.12}$$

### 1.3.3 Extremwertverteilungen

In diesem Abschnitt sind $\tau_1, \tau_2, \ldots$ unabhängig, identisch exponentialverteilte Zufallsgrößen mit Parameter 1. Das heißt, sie besitzen die gemeinsame Verteilungsdichte $p(x) = \mathrm{e}^{-x}$ und die Verteilungsfunktion $F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$ für $x \geq 0$.
Wir werden in diesem Abschnitt sehen, daß man aus einer Transformation der Exponentialverteilung ganz einfach die Hoeffding-Koeffizienten der sogenannten Extremwertverteilungen erhält.
Dazu definieren wir erst einmal die Extremwertverteilungen.

**Definition 1.3** *Man sagt, die Zfgr. $\xi$ ist extremwertverteilt vom Typ 1,2 oder 3, falls sie folgende Verteilungsfunktion besitzt*

Typ 1*(Gumbel-Typ):*

$$F_1(x) = \exp\left(-\mathrm{e}^{-\frac{x-a}{b}}\right)$$

Typ 2*(Fréchet-Typ):*

$$F_2(x) = \begin{cases} \exp\left(-\left(\frac{x-a}{b}\right)^{-\beta}\right) & \textit{für } x > a \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

Typ 3*(Weibull-Typ):*

$$F_3(x) = \begin{cases} \exp\left(-\left(\frac{a-x}{b}\right)^{\beta}\right) & \textit{für } x \leq a \\ 1 & \textit{sonst} \end{cases}$$

*Dabei ist $a \in \mathbb{R}$ und $b, \beta > 0$.*

**Bemerkung 2**

(a) Wenn $\xi$ gemäß Typ 3 verteilt ist, dann besitzt $a - \xi$ eine Weibull Verteilung.

(b) Verteilungen vom Typ 2 und Typ 3, lassen sich durch die Transformation $\zeta_2 = \ln(\xi - a)$ beziehungsweise $\zeta_3 = -\ln(a - \xi)$ in eine Verteilung vom Typ 1 umwandeln.
Deswegen heißt die Gumbel-Typ Verteilung auch manchmal **die** Extremwertverteilung.

(c) Man erhält die Verteilungsdichten der 3 Typen durch einfaches Differenzieren.

(d) Sind $\eta_1, \eta_2$, und $\eta_3$ standard-extremwertverteilt (a=0 und b=1) vom Typ 1,2 und 3, dann sind die Erwartungswerte gegeben durch:

$$\begin{aligned} \eta_1 &\sim \text{Typ 1} && \Rightarrow \mathbb{E}\eta_1 = C \\ \eta_2 &\sim \text{Typ 2} && \Rightarrow \mathbb{E}\eta_2 = \Gamma\left(1 - \frac{1}{\beta}\right) \text{ für } \beta > 1 \\ \eta_3 &\sim \text{Typ 3} && \Rightarrow \mathbb{E}\eta_3 = -\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet C die Euler'sche Konstante $C = 0,57722...$ und $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}dt$ die Gammafunktion.

Nun kann man durch Umformung von Zufallsgrößen der Exponentialverteilung jede Extremwertverteilung beliebigen Types erhalten.

**Lemma 1.7** *Es sei $\tau$ exponentialverteilt mit Parameter 1. Dann gilt*

$$\begin{aligned}\xi_1 &= a - b\ln\tau \sim \ \textit{Typ 1} \quad , \\ \xi_2 &= a + b\tau^{-\frac{1}{\beta}} \sim \ \textit{Typ 2} \quad , \\ \xi_3 &= a - b\tau^{\frac{1}{\beta}} \sim \ \textit{Typ 3}\end{aligned}$$

*für $a \in \mathbb{R}$ und $b, \beta > 0$.*

**Beweis:** Für die Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung mit Parameter 1 gilt:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases} .$$

<u>Nun zu $\xi_1 = a - b\ln\tau$:</u>

$$\begin{aligned} F_{\xi_1}(x) &= \mathcal{P}(\xi_1 < x) = \mathcal{P}(a - b\ln\tau < x) \\ &= \mathcal{P}\left(\ln\tau > -\frac{x-a}{b}\right) = \mathcal{P}\left(\tau > \mathrm{e}^{-\frac{x-a}{b}}\right) \\ &= 1 - \mathcal{P}\left(\tau \leq \mathrm{e}^{-\frac{(x-a)}{b}}\right) \\ &= 1 - \mathcal{P}\left(\tau < \mathrm{e}^{-\frac{(x-a)}{b}}\right) \quad , \end{aligned}$$

da $\mathcal{P}(\tau = x) = 0$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ folgt dann

$$F_{\xi_1}(x) = \exp\left(-\mathrm{e}^{-\frac{x-a}{b}}\right), \text{ also } F_{\xi_1}(x) = F_1(x).$$

<u>Für $\xi_2 = a + b\,\tau^{-\frac{1}{\beta}}$:</u>

Aus $\mathcal{P}(\tau < 0) = 0$ folgt, daß $\mathcal{P}(\xi_2 < a) = 0$.

$$\underline{x \geq a:} \qquad \begin{aligned} F_{\xi_2}(x) &= \mathcal{P}(\xi_2 < x) = \mathcal{P}\left(a + b\,\tau^{-\frac{1}{\beta}} < x\right) \\ &= \mathcal{P}\left(\tau^{-\frac{1}{\beta}} < \left(\frac{x-a}{b}\right)\right) \\ &= \mathcal{P}\left(\frac{1}{\tau^{\frac{1}{\beta}}} < \left(\frac{x-a}{b}\right)\right) \quad . \end{aligned}$$

Als Kehrwert erhält man :

$$\begin{aligned} F_{\xi_2}(x) &= \mathcal{P}\left(\tau^{\frac{1}{\beta}} > \left(\frac{x-a}{b}\right)^{-1}\right) \\ &= \mathcal{P}\left(\tau > \left(\frac{x-a}{b}\right)^{-\beta}\right) \quad . \end{aligned}$$

Da $\tau$ exponentialverteilt ist, wissen wir, daß die Verteilungsfunktion von $\tau$ stetig ist. Damit gilt

$$\begin{aligned} F_{\xi_2}(x) &= 1 - \mathcal{P}\left(\tau < \left(\frac{x-a}{b}\right)^{-\beta}\right) \\ &= \exp\left(-\left(\frac{x-a}{b}\right)^{-\beta}\right) . \end{aligned}$$

Also ist gezeigt, daß $\xi_2$ gemäß einer Typ 2 Verteilung verteilt ist.

Analog wie bei $\xi_2$ berechnet man die Verteilungsfunktion von $\xi_3 = a - b\tau^{\frac{1}{\beta}}$, und somit ist das Lemma bewiesen.

□

Nachdem man aus diesen Transformationen der Exponentialverteilung eine gewünschte Extremwertverteilung erhält, lassen sich die Hoeffding-Koeffizienten der Extremwertverteilungen aus der Exponentialverteilung berechnen. Dazu brauchen wir nur noch folgendes Lemma.

**Lemma 1.8** *Es seien $\eta_1, \eta_2, \ldots$ unabhängig, identisch exponentialverteilte Zufallsgrößen mit Parameter $\lambda > 0$. Dann gilt für $\zeta_1^{(n)} := \min(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ und $\zeta_2^{(n)} := \frac{\eta_1}{n}$*

$$\zeta_1^{(n)} \sim \zeta_2^{(n)} \sim \mathrm{Exp}_{n\lambda} \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

*Also sind $\zeta_1^{(n)}$ und $\zeta_2^{(n)}$ exponentialverteilt mit Parameter $n\lambda$.*

**Beweis:** Die $\eta$'s sind exponentialverteilt, daß heißt $F_\eta(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$ für $x \geq 0$.

<u>Für $\zeta_1^{(n)} = \min(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$:</u>

$$\begin{aligned} F_{\zeta_1^{(n)}}(x) &= \mathcal{P}(\zeta_1^{(n)} < x) = \mathcal{P}\left(\min(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) < x\right) \\ &= 1 - \mathcal{P}(\min(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) \geq x) = 1 - \mathcal{P}(\eta_1 \geq x, \ldots, \eta_n \geq x) \\ &= 1 - \mathcal{P}(\eta_1 \geq x) \ldots \mathcal{P}(\eta_1 \geq x) \\ &= 1 - \left(\mathcal{P}(\eta_1 \geq x)\right)^n \\ &= 1 - \left(1 - F_{\eta_1}(x)\right)^n \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-n\lambda x}. \end{aligned}$$

Dabei wird in der dritten Zeile die Unabhängigkeit und in der vierten die identische Verteilung der $\eta$'s ausgenutzt.

Und nun für $\zeta_2^{(n)} := \frac{\eta_1}{n}$:

$$\begin{aligned} F_{\zeta_2^{(n)}}(x) &= \mathcal{P}(\zeta_2^{(n)} < x) = \mathcal{P}\left(\frac{\eta_1}{n} < x\right) \\ &= \mathcal{P}(\eta_1 < nx) \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-n\lambda x}. \end{aligned}$$

Somit ist die Verteilungsfunktion von $\zeta_1^{(n)}$ und $\zeta_2^{(n)}$ identisch mit der Verteilungsfunktion einer Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda n$. Da Zufallsgrößen durch ihre Verteilungsfunktion eindeutig bestimmt sind, ist das Lemma bewiesen.

□

**Satz 1.4 (Hoeffding-Koeffizienten der Standard-Extremwertverteilungen)** *Es seien $\eta_1, \eta_2$, und $\eta_3$ standard-extremwertverteilt gemäß Definition 1.3 (mit a=0 und b=1) vom Typ 1, 2 und 3. Dann gilt für die zugehörigen Hoeffding-Koeffizienten $\tilde{\beta}_n^1, \tilde{\beta}_n^2$, und $\tilde{\beta}_n^3$:*

*Typ 1 (Gumbel-Typ):*

$$\tilde{\beta}_n^1 = \ln n + C$$

*Typ 2 (Fréchet-Typ):*

$$\tilde{\beta}_n^2 = \sqrt[\beta]{n}\,\Gamma(1 - 1/\beta) \qquad \textit{für } \beta > 1$$

*Typ 3 (Weibull-Typ):*

$$\tilde{\beta}_n^3 = -\frac{1}{\sqrt[\beta]{n}}\,\Gamma(1 + 1/\beta)\ .$$

**Beweis:** Wir versuchen uns einfach die Eigenschaften der Exponentialverteilung zu Nutze zu machen.

Typ 1

Es seien $\eta_1, \eta_2, \ldots$ u.i.v. gemäß einer Standard-Extremwertverteilung ersten Types verteilt. Das heißt, sie sind laut Lemma 1.7 aus der Transformation $\eta_k = -\ln \tau_k$ entstanden.
Nun betrachten wir $\max\{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$:

$$\begin{aligned} \max\{\eta_1, \ldots, \eta_n\} &= \max\{-\ln \tau_1, \ldots, -\ln \tau_n\} \\ &= -\min\{\ln \tau_1, \ldots, \ln \tau_n\} \\ &= -\ln \min\{\tau_1, \ldots, \tau_n\}\ , \end{aligned}$$

da der Logarithmus monoton wachsend ist. Somit gilt nach Lemma 1.8

$$\begin{aligned} \max\{\eta_1, \ldots, \eta_n\} &\sim -\ln\left(\frac{\tau}{n}\right) = \ln n - \ln \tau \\ &\sim \ln n + \eta_1\ . \end{aligned}$$

Daraus folgt für die Hoeffding-Koeffizienten :

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}_n^1 &= \mathbb{E}\max\{\eta_1,\dots,\eta_n\} = \mathbb{E}(\ln n + \eta_1)\\ &= \ln n + \mathbb{E}\eta_1\ .\end{aligned}$$

Der Erwartungswert ist linear und mit Bemerkung 2($d$) gilt nun

$$\tilde{\beta}_n^1 = \ln n + C\ .$$

Dabei bezeichnet $C = 0,57722\dots$ die Euler'sche Konstante.

Typ 2

Jetzt seien die $\eta_1, \eta_2, \dots$ unabhängig, identisch gemäß einer Standard-Extremwertverteilung zweiten Types verteilt ($\eta_k = \tau_k^{-\frac{1}{\beta}}$). Man beachte, daß hier $\eta_k$ nur einen Erwartungswert besitzt für $\beta > 1$. Dann gilt für $\max\{\eta_1,\dots,\eta_n\}$:

$$\begin{aligned}\max\{\eta_1,\dots,\eta_n\} &= \max\left\{\tau_1^{-\frac{1}{\beta}},\dots,\tau_n^{-\frac{1}{\beta}}\right\}\\ &= \min\{\tau_1,\dots,\tau_n\}^{-\frac{1}{\beta}}.\end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned}\max\{\eta_1,\dots,\eta_n\} &\sim \left(\frac{\tau}{n}\right)^{-\frac{1}{\beta}} = \sqrt[\beta]{n}\tau^{-\frac{1}{\beta}}\\ &\sim \sqrt[\beta]{n}\,\eta_1.\end{aligned}$$

Also folgt für $\tilde{\beta}_n^2$

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}_n^2 &= \mathbb{E}\max\{\eta_1,\dots,\eta_n\} = \mathbb{E}[\sqrt[\beta]{n}\,\eta_1]\\ &= \sqrt[\beta]{n}\,\mathbb{E}\eta_1\\ &= \sqrt[\beta]{n}\,\Gamma\left(1-\frac{1}{\beta}\right).\end{aligned}$$

Hier wurde wieder die Linearität des Erwartungswertes und Bemerkung 2 benutzt. Die Hoeffding-Koeffizienten der Standard-Weibull-Typ Extremwertverteilung errechnet man wieder analog, wie beim Typ 2. Damit ist der Satz bewiesen.

□

**Satz 1.5 (Hoeffding-Koeffizienten der Extremwertverteilungen)** *Es seien $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ Zufallsgrößen mit Verteilungen vom Typ 1, 2 und 3 wie in Definition 1.3. Dann gilt für die zugehörigen Hoeffding-Koeffizienten $\beta_n^1, \beta_n^2,$ und $\beta_n^3$:*

*Typ 1 (Gumbel-Typ):*

$$\beta_n^1 = a + b \ln n + bC$$

*Typ 2 (Fréchet-Typ):*

$$\beta_n^2 = a + b\sqrt[\beta]{n}\,\Gamma(1 - 1/\beta) \qquad \text{für } \beta > 1$$

*Typ 3 (Weibull-Typ):*

$$\beta_n^3 = a - b\frac{1}{\sqrt[\beta]{n}}\,\Gamma(1 + 1/\beta)\ .$$

**Beweis:** Dieser Satz ist eine einfache Folgerung aus Satz 1.4. Es bezeichnen wieder $\tilde{\beta}_n^j$ für $j = 1, 2, 3$ die Hoeffding-Koeffizienten der Standard-Extremwertverteilungen und $\eta_1, \eta_2, \eta_3$ seien standardextremwertverteilte Zufallsgrößen vom Typ 1, 2 und 3. Dann gilt für $j = 1, 2, 3$

$$\xi_j = a\eta_j + b\ .$$

Wenden wir jetzt noch Lemma 1.4 von Seite 11 auf die $\tilde{\beta}_n^j$ aus dem vorhergehenden Satz an, sind damit die Hoeffding-Koeffizienten der Extremwertverteilungen bestimmt.

□

### 1.3.4 Normalverteilungen

**Die Standardnormalverteilung**

Die Hoeffding-Koeffizienten der Standardnormalverteilung zu berechnen, erweist sich als überaus schwierig. Trotz dessen hat man auf Grund der beherrschenden Stellung der Standardnormalverteilung in der Statistik als erstes versucht, diese numerisch zu bestimmen. Für die ersten paar $n$ mit $n \leq 5$ existieren sogar geschlossene Ausdrücke für die Hoeffding-Koeffizienten der Standardnormalverteilung siehe [1] ab Seite 88.
Da ich die Hoeffding-Koeffizienten der Standardnormalverteilung später noch brauche, werde ich jetzt die Hoeffding-Koeffizienten der Standardnormalverteilung mit $\delta_1, \delta_2, \ldots$ bezeichnen und für die ersten fünf gilt

$$\delta_1 = 0 \qquad \delta_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \approx 0,564190$$

$$\delta_3 = \frac{3}{2\sqrt{\pi}} \approx 0,846284 \qquad \delta_4 = \frac{6}{\pi\sqrt{\pi}} \tan^{-1}\sqrt{2} \approx 1,029375$$

$$\delta_5 = \frac{10}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{3}{2\pi}\tan^{-1}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\right) \approx 1,162964\ .$$

Hier sieht man auch, daß die Hoeffding-Koeffizienten langsam ansteigen und im nächsten Abschnitt zeigt sich dann auch $\lim_{n\to\infty}\delta_n = \infty$. Für $n > 5$ kann man die Hoeffding-Koeffizienten numerisch berechnen. Dies ist auch mit Hilfe der Formel (1.6) möglich. Nach Folgerung 4 auf Seite 30 ist es ausreichend entweder die ungeraden oder die geraden Hoeffding-Koeffizienten zu bestimmen, da die restlichen dann aus Formel (1.14) folgen.

**Allgemeine Normalverteilungen**

Wenn man die Hoeffding-Koeffizienten der Standardnormalverteilung hat, kann man über die Linearität der Hoeffding-Koeffizienten auch die Hoeffding-Koeffizienten von einer allgemeinen Normalverteilung errechnen.
Wenn $\xi$ eine standardnormalverteilte Zufallsgröße ist und wenn $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ sind, dann ist $\eta = \sigma\xi + \mu$ eine normalverteilte Zufallsgröße mit Mittelwert $\mu$ und Varianz $\sigma^2$. Nun bekommt man die Hoeffding-Koeffizienten von $\eta$ aus Lemma 1.4 und somit gilt folgender

**Satz 1.6** *Es sei $\eta$ eine normalverteilte Zufallsgröße mit Mittelwert $\mu$ und Varianz $\sigma^2$. Es seien $\delta_1, \delta_2, \ldots$ die Hoeffding-Koeffizienten der Standardnormalverteilung. Dann sind die Hoeffding-Koeffizienten $\beta_1, \beta_2, \ldots$ von $\eta$ gegeben durch*

$$\beta_n = \sigma\delta_n + \mu \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

## 1.4 Der Träger von Zufallsgrößen und Hoeffding-Koeffizienten

Wenn $\xi$ eine Zufallsgröße mit $\mathbb{E}|\xi| < \infty$ ist, dann approximieren die Hoeffding-Koeffizienten die konvexe Hülle des Trägers von $\xi$. Dazu definieren wir zunächst den Träger einer Zufallsgröße über den Träger eines Maßes (vergleiche [5] auf Seite 343).

**Definition 1.4 (Träger eines Maßes)** *Es sei $\mu$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $[\mathbb{R}^d, \mathcal{R}_d]$. Dann ist $N \subseteq \mathbb{R}^{d*}$ der* Träger von $\mu$, *wenn $N$ das Komplement der größten offenen $\mu$-Nullmenge ist.*

Hier bezeichnet $\mathbb{R}^*$ die erweiterte reelle Achse $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ und

$$\mathbb{R}^{d*} = \underbrace{\mathbb{R}^* \times \cdots \times \mathbb{R}^*}_{\text{d-mal}} .$$

**Definition 1.5** *Es sei $\xi$ eine Zufallsgröße. Dann heißt $N \subseteq \mathbb{R}^*$* Träger von $\xi$, *wenn $N$ der Träger des Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathrm{P}_\xi$ auf $[\mathbb{R}, \mathcal{R}]$ ist.*

**Bemerkung 3:**

(a) Der Träger einer Zufallsgröße ist stets abgeschlossen.

(b) Es gilt: $x$ ist genau dann im Träger von $\xi$ enthalten, wenn für jede offene Umgebung $U$ von $x$ gilt $\mathcal{P}(\xi \in U) > 0$.

(c) Die Zufallsgröße $\xi$ ist genau dann beschränkt, wenn ihr Träger $M$ beschränkt ist.

**Satz 1.7** *Es sei $\xi$ eine Zufallsgröße mit Träger $N$. Dann gilt*

$$\max N = \lim_{n\to\infty} \max\{\xi_1, \ldots, \xi_n\} \quad \textit{fast sicher,}$$

*dabei sind $\xi = \xi_1, \xi_2, \xi_3 \ldots$ unabhängig identisch gemäß $\mathrm{P}_\xi$ verteilt.*

**Beweis:**
$N$ ist der Träger von $\xi$, somit gilt $\mathcal{P}(\xi \in N) = 1$. Nun bezeichnen wir mit $a := \min N$ und mit $b := \max N$, dabei sind $a, b \in \mathbb{R}^*$. Nun gilt $a \leq \xi \leq b$ fast sicher und damit für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\max\{\xi_1, \ldots, \xi_n\} \leq \max\{b, \ldots, b\} = b \quad \text{fast sicher.}$$

Schließlich erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} \max\{\xi_1, \ldots, \xi_n\} \leq b \quad \text{fast sicher.}$$

<u>1.Fall $b < \infty$:</u> Da $b$ ein Element des Trägers ist, gilt für alle $\varepsilon > 0$ daß $\mathcal{P}(\xi \in B_\varepsilon(b)) > 0$, mit $B_\varepsilon(b) = \{x \in \mathbb{R} : \|x - b\| < \varepsilon\}$. Da jetzt aber $\xi \leq b$ fast sicher ist, gilt also

$$\mathcal{P}(\xi \in (b - \varepsilon, b]) =: p_\varepsilon > 0 \ .$$

Nun betrachten wir für ein festes $\varepsilon > 0$ die Ereignisse

$$A_n := \{\omega \in \Omega : \xi_n(\omega) \in (b - \varepsilon, b]\} \ .$$

Diese sind vollständig unabhängig, da die $\xi_n$ alle unabhängig sind. Weil die $\xi_n$ identisch verteilt sind, gilt $\mathcal{P}(A_n) = p_\varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit erhalten wir $\sum_{n=1}^\infty \mathcal{P}(A_n) = \infty$. Nun folgt aber mit dem Borel-Cantelli Lemma

$$\mathcal{P}\left(\lim_{n\to\infty} \sup A_n\right) = \mathcal{P}(A_n \text{ tritt ein für unendlich viele } n) = 1 \ .$$

Also gilt für alle $\varepsilon > 0$, daß für unendlich viele $k \in \mathbb{N}$ gilt $\xi_k \in (b - \varepsilon, b]$ fast sicher und $\lim_{n\to\infty} \max\{\xi_1, \ldots, \xi_n\} \leq b$ fast sicher. Daraus folgt nun insgesamt

$$\max N = \lim_{n\to\infty} \max\{\xi_1, \ldots, \xi_n\} \quad \text{fast sicher.}$$

<u>2.Fall $b = \infty$:</u> Dieser geht analog zum obigen Fall, indem man die Ereignisse

$$A_n := \{\omega \in \Omega : \xi_n(\omega) \in (c, \infty)\} \quad \text{für beliebiges } c < b = \infty \text{ betrachtet.}$$

□

**Satz 1.8** *Sei $\xi$ eine Zufallsgröße mit Träger $N$ und mit $\mathbb{E}|\xi| < \infty$. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n = \max N \quad \textit{und } \beta_n \leq \max N \textit{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

*Dabei bezeichnet $\beta_n = \mathbb{E}\max\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ den $n$-ten Hoeffding-Koeffizienten von $\xi$.*

**Beweis:** Wir bezeichnen wieder $b := \max N$ und $\eta_n := \max\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$, dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\eta_n = \max\{\xi_1, \dots, \xi_n\} \le \eta_{n+1} = \max\{\xi_1, \dots, \xi_{n+1}\} \le b \ .$$

Somit gilt $\eta_1 \le \eta_2 \le \cdots \le b$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ erhalten wir $\mathbb{E}\eta_n = \beta_n \le b$. Mit den Zufallsgrößen $\tilde{\eta}_n = \eta_n - \eta_1$ haben wir $0 \le \tilde{\eta}_1 \le \tilde{\eta}_2 \le \cdots \le b - \eta_1$ und wir können den Satz von B.Levi und Satz 1.7 anwenden

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\tilde{\eta}_n &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\eta_n - \eta_1) \\
&= \mathbb{E}\left(\lim_{n\to\infty} (\eta_n - \eta_1)\right) \\
&= \mathbb{E} \lim_{n\to\infty} \eta_n - \mathbb{E}\eta_1 \\
&= \mathbb{E} \lim_{n\to\infty} \max\{\xi_1, \dots, \xi_n\} - \mathbb{E}\xi \\
&= \mathbb{E}b - \mathbb{E}\xi = b - \mathbb{E}\xi \ .
\end{aligned}$$

Da jetzt aber $\mathbb{E}\xi < \infty$ und $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\tilde{\eta}_n = \lim_{n\to\infty} \beta_n - \mathbb{E}\xi$ ist, gilt der Satz.

□

**Satz 1.9** *Sei $\xi$ eine Zufallsgröße mit Träger $N$ und mit $\mathbb{E}|\xi| < \infty$. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \min N \quad \text{und } \alpha_n \ge \min N \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

*Dabei bezeichnet $\alpha_n = \mathbb{E}\min\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ und die $\xi = \xi_1, \xi_2, \xi_3 \dots$ sind unabhängig identisch gemäß $\mathrm{P}_\xi$ verteilt.*

**Beweis:** Hier setzen wir $\eta = -\xi$ und $\eta_i = -\xi_i$. Damit besitzt $\eta$ den Träger $M = \{-x : x \in N\} = -N$ und $\mathbb{E}|\eta| = \mathbb{E}|\xi| < \infty$. Jetzt folgt mit Satz 1.8:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \alpha_n &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\min\{\xi_1, \dots, \xi_n\} \\
&= -\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\max\{-\xi_1, \dots, -\xi_n\} \\
&= -\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\max\{\eta_1, \dots, \eta_n\} \\
&= -\max M \\
&= -\max\{-N\} \\
&= \min N \ .
\end{aligned}$$

Daß $\alpha_n \ge \min N$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, zeigt man wie oben.

□

Insgesamt erhält man nun folgenden

**Satz 1.10 (Trägersatz für Zufallsgrößen)** *Sei $\xi$ eine Zufallsgröße mit Träger $N$ und mit $\mathbb{E}|\xi| < \infty$. Dann gilt*

$$\left[\lim_{n\to\infty} \alpha_n, \lim_{n\to\infty} \beta_n\right] = \mathrm{conv}\{N\} \text{ und}$$
$$[\alpha_n, \beta_n] \subseteq \mathrm{conv}\{N\} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

*Dabei sind $\alpha_n = \mathbb{E}\min\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ und $\beta_n = \mathbb{E}\max\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ die n-ten Hoeffding-Koeffizienten von $\xi$.*

**Beweis:** Aus den Sätzen 1.8 und 1.9 und aus der Darstellung

$$\mathrm{conv}\{N\} = [\min N, \max N] \quad \text{folgt direkt Satz 1.10.}$$

□

Also approximieren die Hoeffding-Koeffizienten die konvexe Hülle des Trägers einer Zufallsgröße mit Erwartungswert von innen heraus.

**Definition 1.6** *Man nennt eine Zufallsgröße deren Träger ein abgeschlossenes Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}^*$ ist, eine* Zufallsgröße mit konvexem Träger.

Durch die Hoeffding-Koeffizienten ist somit der Träger einer Zufallsgröße mit konvexem Träger und Erwartungswert bestimmbar.

**Folgerung 2** *Es sei $\xi$ eine Zufallsgröße mit konvexem Träger und $\mathbb{E}|\xi| < \infty$. Dann ist*

$$\left[\lim_{n\to\infty} \alpha_n, \lim_{n\to\infty} \beta_n\right] \quad \text{der Träger von } \xi.$$

*Dabei sind $\alpha_n = \mathbb{E}\min\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ und $\beta_n = \mathbb{E}\max\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ die n-ten Hoeffding-Koeffizienten von $\xi$.*

**Beweis:** Da $\xi$ eine Zufallsgröße mit konvexem Träger ist, gilt für den Träger $N$ von $\xi$

$$\mathrm{conv}\{N\} = N$$

und damit erhält man die Aussage mit Hilfe von Satz 1.10.

□

### 1.4.1 Nichtnegative Zufallsgrößen

**Satz 1.11** *Eine Zufallsgröße $\xi$ mit $\mathbb{E}|\xi| < \infty$ ist genau dann nicht negativ, wenn für die Hoeffding-Koeffizienten von $\xi$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\alpha_n \geq 0$.*

**Beweis:** Dies ist eine direkte Folgerung aus dem Trägersatz für Zufallsgrößen auf Seite 27, da der Träger einer nicht negativen Zufallsgröße eine Teilmenge der positiven Halbachse ist.

□

**Beispiel**

Bei der Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda > 0$ waren die Hoeffding-Koeffizienten gegeben durch

$$\alpha_n = \frac{1}{\lambda n} \quad \text{und}$$
$$\beta_n = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \ .$$

Die $\alpha_n$ streben bei wachsenden $n$ von oben gegen 0 und die $\beta_n$ streben von unten gegen $\infty$, aufgrund der Divergenz der harmonische Reihe. Also ist der Träger der Exponentialverteilung gegeben durch $N = [0, \infty]$.Wie nicht anders zu erwarten, ist die Exponentialverteilung eine nicht negative Verteilung, da die $\alpha_n \geq 0$ sind.

### 1.4.2 Beschränkte Zufallsgrößen

Als Folgerung aus dem Trägersatz auf Seite 27 bekommen wir auch folgendes Resultat.

**Satz 1.12** *Eine Zufallsgröße $\xi$ ist genau dann beschränkt, wenn ein $c \in \mathbb{R}$ existiert mit $|\alpha_n|, |\beta_n| \leq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

**Beispiel**

Der Träger einer in $[a, b]$ gleichverteilten Zufallsgröße mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$ ist natürlich $N = [a, b]$. Die Hoeffding-Koeffizienten von der Gleichverteilung kennen wir ja bereits

$$\alpha_n = \frac{an}{n+1} + \frac{b}{n+1} = \frac{an+b}{n+1} \quad \text{und}$$
$$\beta_n = \frac{a}{n+1} + \frac{bn}{n+1} = \frac{a+bn}{n+1} \ .$$

Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\alpha_n = (an+b)\frac{1}{n+1} \geq (an+a)\frac{1}{n+1} = a \quad \text{und}$$
$$\beta_n = (a+bn)\frac{1}{n+1} \leq (b+bn)\frac{1}{n+1} = b \ ,$$

also sieht man mit Hilfe der Hoeffding-Koeffizienten und $c = \max\{|a|, |b|\}$, daß die Gleichverteilung eine beschränkte Verteilung ist. Wie es der Trägersatz schon vorhersagt, ist allgemeiner zu erkennen, daß

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} a\frac{n}{n+1} + b\frac{1}{n+1} = a \quad \text{und}$$
$$\lim_{n\to\infty} \beta_n = \lim_{n\to\infty} a\frac{1}{n+1} + b\frac{n}{n+1} = b \quad \text{ist.}$$

## 1.5 Symmetrische Verteilungen

### 1.5.1 Charakterisierung durch die Hoeffding-Koeffizienten

**Definition 1.7** *Die Verteilung* $\mathrm{P}_\xi$ *einer Zufallsgröße* $\xi$ *heißt* symmetrisch*, wenn gilt*

$$\mathrm{P}_\xi(B) = \mathrm{P}_\xi(-B) \quad \textit{für alle } B \in \mathfrak{R}, \textit{ also mit anderen Worten } -\xi \sim \xi \ .$$

Eine Zufallsgröße heißt dann symmetrisch, wenn es ihr Verteilungsgesetz ist. Nun versuchen wir die symmetrischen Verteilungen mit Hilfe der Hoeffding-Koeffizienten zu charakterisieren.

**Satz 1.13** *Das Verteilungsgesetz einer Zufallsgröße* $\xi$ *mit* $\mathbb{E}|\xi| < \infty$ *ist genau dann symmetrisch, wenn für die dazugehörigen Hoeffding-Koeffizienten für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$\alpha_n = -\beta_n \ .$$

**Beweis:** In diesem Beweis benutzen wir mehrere Male die die völlig triviale Gleichung

$$\max\{x_1, \ldots, x_n\} = -\min\{-x_1, \ldots, -x_n\} \ . \tag{1.13}$$

<u>($\Rightarrow$)</u>: Nehmen wir also an, daß das Verteilungsgesetz von $\xi$ symmetrisch ist. Also gilt $-\xi \sim \xi$. Somit erhalten wir mit obiger Gleichung (1.13)

$$\begin{aligned}\beta_n &= \mathbb{E}\max\{\xi_1, \ldots, \xi_n\} \\ &= \mathbb{E}(-\min\{-\xi_1, \ldots, -\xi_n\}) \\ &= -\mathbb{E}\min\{-\xi_1, \ldots, -\xi_n\} \\ &= -\mathbb{E}\min\{\xi_1, \ldots, \xi_n\} \ ,\end{aligned}$$

da $-\xi_i \sim \xi$ für alle $n \in \mathbb{N}$, mit $\xi_1, \xi_2, \ldots$ unabhängig identisch gemäß $\mathrm{P}_\xi$ verteilt. Damit gilt insgesamt

$$\beta_n = -\alpha_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

<u>($\Leftarrow$)</u>: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gelte nun $\alpha_n = -\beta_n$. Aus (1.13) bekommen wir wieder

$$\begin{aligned}\beta_n &= \mathbb{E}\max\{\xi_1, \ldots, \xi_n\} = -\alpha_n \\ &= -\mathbb{E}\min\{\xi_1, \ldots, \xi_n\} \\ &= \mathbb{E}\max\{-\xi_1, \ldots, -\xi_n\} \ .\end{aligned}$$

Wir setzen $\eta_k = -\xi_k$ und erhalten aus obiger Rechnung für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}\max\{\xi_1, \ldots, \xi_n\} = \mathbb{E}\max\{\eta_1, \ldots, \eta_n\} \ .$$

also sind alle Hoeffding-Koeffizienten von $\xi$ und $\eta$ gleich. Mit dem Eindeutigkeitssatz (Seite 13) heißt das aber nichts anderes, als $\xi \sim \eta$, also $\xi \sim -\xi$.
Damit ist gezeigt, daß $\xi$ eine symmetrische Verteilung besitzt.

$\square$

**Folgerung 3** *Das Verteilungsgesetz einer Zufallsgröße $\xi$ mit $\mathbb{E}|\xi| < \infty$ ist genau dann symmetrisch, wenn für die Hoeffding-Koeffizienten von $\xi$ gilt*

$$\beta_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \beta_k \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}. \tag{1.14}$$

**Beweis:** Dies folgt aus dem letzten Satz und der Darstellung (1.2)

$$\alpha_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k+1} \beta_k \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

□

Dieses Ergebnis verdeutlichen wir uns für die ersten $n$

$$\begin{array}{lll}
\underline{n=1} & \beta_1 = -\beta_1 & \Rightarrow \beta_1 = \mathbb{E}\xi = 0 \\
\underline{n=2} & \beta_2 = -2\beta_1 + \beta_2 & \\
\underline{n=3} & \beta_3 = -3\beta_1 + 3\beta_2 - \beta_3 & \Rightarrow 2\beta_3 = 3\beta_2 \\
\underline{n=4} & \beta_4 = -4\beta_1 + 6\beta_2 - 4\beta_3 + \beta_4 & \Rightarrow 2\beta_3 = 3\beta_2 \\
\underline{n=5} & \beta_5 = -5\beta_1 + 10\beta_2 - 10\beta_3 + 5\beta_4 - \beta_5 & \\
\multicolumn{3}{l}{\quad \Rightarrow 2\beta_5 = -5\beta_2 + 5\beta_4 \text{ und } 15\beta_4 = 10\beta_3 + 6\beta_5\ .}
\end{array}$$

Daß $\beta_1 = 0$ ist, ist klar, da $\xi$ eine symmetrische Verteilung besitzt.

**Folgerung 4** *Wenn die Zufallsgröße $\xi$ mit $\mathbb{E}|\xi| < \infty$ ein symmetrisches Verteilungsgesetz besitzt, dann sind die geraden (ungeraden) Hoeffding-Koeffizienten $\{\beta_{2k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ ($\{\beta_{2k+1}\}_{k\in\mathbb{N}}$) ausreichend, um das Verteilungsgesetz von $\xi$ zu charakterisieren.*

**Beweis:** Falls wir die geraden (ungeraden) Hoeffding-Koeffizienten haben, dann müssen wir die gegebenen Hoeffding-Koeffizienten einfach sukzessive in die obige Formel (1.14) für alle ungeraden $n \in \mathbb{N}$ einsetzen. Wir haben zum Beispiel die geraden Hoeffding-Koeffizienten $\beta_2, \beta_4, \ldots$ gegeben. Wir setzen $\beta_2$ in die Gleichung (1.14) für $n = 3$ ein und erhalten somit $\beta_2$. Anschließend setzen wir $\beta_2, \beta_3, \beta_4$ in (1.14) für $n = 5$ ein und erhalten damit $\beta_5$.

□

### 1.5.2 Berechnung der Hoeffding-Koeffizienten einer symmetrischen Verteilung

Wie der aufmerksame Leser bereits festgestellt hat, sind bis jetzt nur die Hoeffding-Koeffizienten der Extremwertverteilungen als Beispiele von Hoeffding-Koeffizienten von Verteilungen berechnet worden, die auf ganz $\mathbb{R}$ konzentriert sind. Diese haben wir durch das Ausdrücken der Extremwertverteilungen als transformierte Exponentialverteilung erhalten.

Will man Hoeffding-Koeffizienten von allgemeinen Verteilungen bestimmen, stellt man fest, daß die Berechnung mitunter auf abenteuerlich riesige Integralformeln führt, so zum Beispiel bei der Standardnormalverteilung. Deshalb versuchen wir jetzt eine Formel herzuleiten, welche uns die Hoeffding-Koeffizienten einer symmetrischen Zufallsgröße $\xi$ aus deren abgeleiteter Betragszufallsgröße $\eta = |\xi|$ errechnet.

**Satz 1.14** *Es sei $\xi$ eine symmetrische Zufallsgröße mit $\mathbb{E}|\xi| < \infty$. Dann gilt für die Hoeffding-Koeffizienten $\beta_n$ von $\xi$*

$$\beta_n = 2^{-n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \overline{\beta}_k((-1)^k + 1) = 2^{-(n-1)} \sum_{l=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2l} \overline{\beta}_{2l} \ , \tag{1.15}$$

*dabei sind die $\overline{\beta}_k$ die Hoeffding-Koeffizienten der Zufallsgröße $\eta = |\xi|$ und $\lfloor x \rfloor$ bezeichnet die größte ganze Zahl $d \in \mathbb{Z}$, für die gilt $d \leq x$.*

**Beweis:** Es sei $\xi$ eine symmetrische Zufallsgröße mit Erwartungswert und $\eta = |\xi|$ sei die Betragszufallsgröße. Dann gilt mit Hilfe der zweipunktverteilten Zufallsgröße $\alpha$ mit $\mathcal{P}(\alpha = 1) = 1/2$ und $\mathcal{P}(\alpha = -1) = 1/2$:

$$\xi \sim \alpha\eta \ .$$

Damit und mit der Formel der totalen Wahrscheinlichkeit erhalten wir

$$\begin{aligned}\beta_n &= \mathbb{E} \max\{\xi_1, \dots, \xi_n\} = \mathbb{E} \max\{\alpha_1\eta_1, \dots, \alpha_n\eta_n\} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n \overline{\beta}_k + \left(\frac{1}{2}\right)^n \mathbb{E} \max\{-\eta_1, \dots, -\eta_n\} \ .\end{aligned}$$

Dies sind alle Hoeffding-Koeffizienten , welche entstehen, wenn genau k der $\alpha$'s positiv sind mit Hilfe der binomischen Formel, plus die letzte Möglichkeit, nämlich, daß alle $\alpha$'s negativ sind. Nun folgt noch mit der Formel (1.3) und einigen Vereinfachungen

$$\begin{aligned}\beta_n &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n \overline{\beta}_k - \left(\frac{1}{2}\right)^n \mathbb{E} \min\{\eta_1, \dots, \eta_n\} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n \overline{\beta}_k - \left(\frac{1}{2}\right)^n \overline{\alpha}_n \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \left( \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \overline{\beta}_k - \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k+1} \overline{\beta}_k \right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \overline{\beta}_k((-1)^k + 1) \\ &= 2^{-(n-1)} \sum_{l=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2l} \overline{\beta}_{2l} \ .\end{aligned}$$

□

### 1.5.3 Laplace-Verteilungen

Mit der soeben gewonnen Formel (1.15) wollen wir die Hoeffding-Koeffizienten der Laplace Verteilung berechnen. Eine Zufallsgröße $\xi$ heißt Laplace verteilt mit Parametern $\lambda > 0$ und $\mu \in \mathbb{R}$, wenn sie folgenden Verteilungsdichte besitzt

$$p(x) = \frac{1}{2\lambda} \mathrm{e}^{\frac{|x-\mu|}{\lambda}} .$$

Nun gilt folgendes Lemma.

**Lemma 1.9** *Der Betrag einer Laplace verteilten Zufallsgröße mit Parameter $\lambda > 0$ und $\mu = 0$ ist exponentialverteilt mit Parameter $\frac{1}{\lambda}$.*

**Beweis:** Sei $\xi$ Laplace verteilt mit Parameter $\lambda > 0$ und $\mu = 0$. Dann besitzt $\xi$ die Verteilungsdichte

$$p(x) = \frac{1}{2\lambda} \mathrm{e}^{\frac{|x|}{\lambda}} .$$

Es sei $\eta = |\xi|$. Es ist zu zeigen, daß $\eta$ exponentialverteilt ist mit Parameter $\frac{1}{\lambda}$. Dazu sei $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ meßbar und wir berechnen

$$\begin{aligned} \mathbb{E} f(\eta) = \mathbb{E} f(|\xi|) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(|x|) p(x) dx \\ &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(|x|) \frac{1}{2\lambda} \mathrm{e}^{\frac{|x|}{\lambda}} dx . \end{aligned}$$

Da $\xi$ symmetrisch ist, folgt

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\lambda} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(|x|) \mathrm{e}^{\frac{|x|}{\lambda}} dx \\ &= \frac{1}{\lambda} \int\limits_{0}^{\infty} f(x) \mathrm{e}^{\frac{x}{\lambda}} dx , \end{aligned}$$

also besitzt $\eta$ die Verteilungsdichte $q(x) = \frac{1}{\lambda} \mathrm{e}^{\frac{x}{\lambda}}$. Und das ist die Dichte der Exponentialverteilung mit Parameter $\frac{1}{\lambda} > 0$.

□

Die Hoeffding-Koeffizienten der Exponentialverteilung haben wir aber bereits ausgerechnet und diese sind für einen exponentialverteilte Zufallsgröße mit Parameter $\frac{1}{\lambda} > 0$

$$\overline{\beta}_k = \lambda \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{l} .$$

Also sind die Hoeffding-Koeffizienten einer Laplace verteilten Zufallsgröße mit Parametern $\lambda > 0$ und $\mu = 0$ durch die Formel (1.15) gegeben durch

$$\begin{aligned}\beta_n &= 2^{-n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \lambda \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{l}((-1)^k + 1) \\ &= \lambda \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{k} \binom{n}{k} \frac{1}{l}((-1)^k + 1) \ .\end{aligned}$$

Diese Doppelsumme kann man noch ein wenig vereinfachen.

**Lemma 1.10** *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{k} \binom{n}{k} \frac{1}{l}((-1)^k + 1) = \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{l} - \frac{1}{2^n}\frac{1}{n} - \frac{1}{2^n} \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{l} \sum_{k=0}^{l-1} \binom{n}{k} \ .$$

**Beweis:** Durch Vertauschung der Summationsreihenfolge erhält man

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{k} \binom{n}{k} \frac{1}{l}((-1)^k + 1) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{l} \sum_{k=l}^{n} \binom{n}{k}((-1)^k + 1) \ .$$

Betrachten wir die hintere Summe extra, erhalten wir mit dem binomischen Satz

$$\begin{aligned}\sum_{k=l}^{n} \binom{n}{k}((-1)^k + 1) &= \sum_{k=l}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k + \sum_{k=l}^{n} \binom{n}{k} \\ &= -\sum_{k=0}^{l-1} \binom{n}{k}(-1)^k + 2^n - \sum_{k=0}^{l-1} \binom{n}{k} \ .\end{aligned}$$

Dies führt insgesamt zu

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{k} \binom{n}{k} \frac{1}{l}((-1)^k + 1) &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{l} \left(2^n - \sum_{k=0}^{l-1} \binom{n}{k}(-1)^k - \sum_{k=0}^{l-1} \binom{n}{k}\right) \\ &= \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{l} - \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{l} \left(\sum_{k=0}^{l-1} \binom{n}{k}(-1)^k + \sum_{k=0}^{l-1} \binom{n}{k}\right) \ .\end{aligned}$$

Schließlich betrachten wir noch einen Teil der hinteren Summe und erhalten

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{l} \sum_{k=0}^{l-1} \binom{n}{k}(-1)^k &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=k+1}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k \frac{1}{l} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}(-1)^k \sum_{l=k+1}^{n} \int_0^1 x^{l-1} dx \ , \text{also}\end{aligned}$$

$$\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{l}\sum_{k=0}^{l-1}\binom{n}{k}(-1)^k = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}(-1)^k\int_0^1\sum_{l=k+1}^{n}x^{l-1}dx$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}(-1)^k\int_0^1 x^k\frac{1-x^{n-k}}{1-x}dx$$
$$= \int_0^1\frac{1}{1-x}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}(-1)^k(x^k-x^n)dx\ .$$

Nun folgt aus

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-x)^k = (1-x)^n \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k = 0\ ,\ \text{daß gilt}$$

$$\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{l}\sum_{k=0}^{l-1}\binom{n}{k}(-1)^k = \int_0^1\frac{1}{1-x}((1-x)^n-(-x)^n+x^n(-1)^n)dx$$
$$= \int_0^1\frac{(1-x)^n}{1-x}dx = \left[-\frac{(1-x)^n}{n}\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{n}\ .$$

Somit ergibt sich insgesamt

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{k}\binom{n}{k}\frac{1}{l}((-1)^k+1) = \sum_{l=1}^{n}\frac{1}{l}-\frac{1}{n}\frac{1}{2^n}-\left(\frac{1}{2}\right)^n\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{l}\sum_{k=0}^{l-1}\binom{n}{k}\ .$$

□

**Satz 1.15** *Die Hoeffding-Koeffizienten für eine Laplace verteilte Zufallsgröße mit Parametern $\lambda > 0$ und $\mu \in \mathbb{R}$ sind gegeben durch*

$$\beta_n = \lambda\left(\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{l}-\frac{1}{2^n}\frac{1}{n}-\frac{1}{2^n}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{l}\sum_{k=0}^{l-1}\binom{n}{k}\right)+\mu\ .$$

**Beweis:** Wenn $\xi$ eine Laplace verteilte Zufallsgröße mit $\mu = 0$ ist, dann wissen wir aus der vorhergehenden Rechnung, daß die Hoeffding-Koeffizienten von $\xi$ gegeben sind durch

$$\beta_n = \lambda\left(\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{l}-\frac{1}{2^n}\frac{1}{n}-\frac{1}{2^n}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{l}\sum_{k=0}^{l-1}\binom{n}{k}\right)\ .$$

Für eine allgemeine Laplace verteilte Zufallsgröße $\eta$ gilt $\eta = \xi + \mu$, da für $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ meßbar gilt

$$\mathbb{E}f(\eta) = \mathbb{E}f(\xi + \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+\mu) \frac{1}{2\lambda} \mathrm{e}^{\frac{|x|}{\lambda}} dx \ .$$

Substituiert man $x = y - \mu$, führt das zu

$$\mathbb{E}f(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{1}{2\lambda} \mathrm{e}^{\frac{|y-\mu|}{\lambda}} dy \ .$$

Aus der Linearität der Hoeffding-Koeffizienten (Lemma 1.4) folgt der Satz.

□

## 1.6 Umkehrformel

### 1.6.1 Vorbereitung

In diesem Teil wollen wir ein paar Eigenschaften der Betaverteilung erster Art herausarbeiten, um dann später damit eine Umkehrformel für Hoeffding-Koeffizienten zu beweisen. Dazu wird die Betaverteilung erster Art zunächst definiert.

**Definition 1.8** *Eine Zufallsgröße $\xi$ ist* betaverteilt erster Art *mit den Parametern $r, s > 0$, in Zeichen $\xi \sim \beta(r,s)$, wenn sie folgende Verteilungsdichte $p_{r,s} : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ besitzt:*

$$p_{r,s}(x) = \mathrm{I}_{[0,1]}(x) \frac{\Gamma(r+s)}{\Gamma(r)\Gamma(s)} x^{r-1}(1-x)^{s-1} \ .$$

**Bemerkung 4:**

(a) Im Folgenden wird die oben definierte Betaverteilung erster Art einfach als Betaverteilung bezeichnet.

(b) Sei jetzt $\xi \sim \beta(r,s)$, dann sind der Erwartungswert und die Varianz von $\xi$ gegeben durch:

$$\mathbb{E}\xi = \frac{r}{r+s} \qquad \mathrm{Var}\xi = \frac{rs}{(r+s)^2(r+s+1)} \ .$$

Nun betrachten wir für ein festes $t \in (0,1)$ die Zufallsgrößen

$$\eta_n \sim \beta(\lfloor nt \rfloor, n - \lfloor nt \rfloor) \quad ; n > \frac{1}{t},$$

die alle auf dem selben Wahrscheinlichkeitsraum $[\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}]$ erklärt sind. Genauer gesagt werden die $\eta_n$ wie folgt definiert:

**Definition 1.9** *Für ein festes $t \in (0,1)$ und alle $n \in \mathbb{N}$ besitzen die Zufallsgrößen $\eta_n$ folgende Verteilungsdichten $p_n : [0,1] \to \mathbb{R}$:*

$$p_n(x) := \begin{cases} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(\lfloor nt \rfloor)\Gamma(n-\lfloor nt \rfloor)} x^{\lfloor nt \rfloor - 1}(1-x)^{n-\lfloor nt \rfloor - 1} & , \text{ für } n > n' \\ 1 & , \text{ für } n \leq n' \ , \end{cases}$$

*wobei $n' := \max\left\{\frac{3}{t} + 2, \frac{2}{1-t} + 2\right\}$ ist.*

Warum das $n'$ so gewählt wird, ergibt sich dann in den nachfolgenden Sätzen. Also sind die $\eta_n$ für $n \leq n'$ gleichverteilt in $[0,1]$. Für $n > n'$ ist dies eine spezielle Folge von betaverteilten Zufallsgrößen mit folgenden Erwartungswerten und Varianzen:

$$\mathbb{E}\,\eta_n = \frac{\lfloor nt \rfloor}{n} \qquad \operatorname{Var}\eta_n = \frac{\lfloor nt \rfloor (n - \lfloor nt \rfloor)}{n^2(n+1)} \ .$$

Man sieht sofort, daß bei wachsendem n der Erwartungswert gegen t strebt und die Varianz gegen 0. Mehr noch kann man zeigen:

**Lemma 1.11** *Für festes $t \in (0,1)$ seien die Zufallsgrößen $\eta_n$ gemäß Definition 1.9 verteilt. Dann streben die $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in Wahrscheinlichkeit gegen t, also*

$$\eta_n \xrightarrow{st} t \ .$$

**Beweis:** Zu zeigen ist:

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{P}(|\eta_n - t| > \varepsilon) = 0 \quad \text{für alle } \varepsilon > 0 \ .$$

Da wir den Limes für n gegen unendlich betrachten, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $n > n'$ ist. Aus der Dreiecksungleichung ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(|\eta_n - t| > \varepsilon) &= \mathcal{P}(|\eta_n - t + \mathbb{E}\eta_n - \mathbb{E}\eta_n| > \varepsilon) \\ &\leq \mathcal{P}(|\eta_n - \mathbb{E}\eta_n| + |\mathbb{E}\eta_n - t| > \varepsilon) \ . \end{aligned}$$

Nun setzen wir

$$\begin{aligned} A_n : &= \left\{\omega \in \Omega : |\eta_n(\omega) - \mathbb{E}\eta_n| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \\ B_n : &= \left\{\omega \in \Omega : |\mathbb{E}\eta_n - t| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \ , \end{aligned}$$

dabei wird $\mathbb{E}\eta_n$ als konstante Zufallsgröße aufgefasst, und

$$C_n : = \{\omega \in \Omega : |\eta_n(\omega) - \mathbb{E}\eta_n| + |\mathbb{E}\eta_n - t| > \varepsilon\} \ .$$

Es ist klar, daß $C_n \subseteq A_n \cup B_n$ gilt. Aus $C_n \subseteq A_n \cup B_n$ und der Monotonie des Maßes folgt:

$$\mathcal{P}(C_n) \leq \mathcal{P}(A_n \cup B_n) \leq \mathcal{P}(A_n) + \mathcal{P}(B_n) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \ .$$

Also gilt auch:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(|\eta_n - t| > \varepsilon) &\leq \mathcal{P}\left(|\eta_n - \mathbb{E}\eta_n| > \frac{\varepsilon}{2}\right) + \mathcal{P}\left(|\mathbb{E}\eta_n - t| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \\ &\leq \frac{4\mathrm{Var}\eta_n}{\varepsilon^2} + \mathcal{P}\left(|\mathbb{E}\eta_n - t| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \ .\end{aligned}$$

Die letzte Abschätzung folgte aus der Tschebycheffschen Ungleichung.
Da $\mathbb{E}\eta_n = \frac{\lfloor nt \rfloor}{n}$ ist, kann man folgern:

$$\frac{nt-1}{n} \leq \mathbb{E}\eta_n \leq \frac{nt}{n} \ ,$$

und es ergibt sich

$$|\mathbb{E}\eta_n - t| \leq \frac{1}{n} \ .$$

Daraus folgt, daß für $n > \max\left\{\frac{2}{\varepsilon}, n'\right\}$ der zweite Summand Null ist. Also verbleibt nur

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \mathcal{P}(|\eta_n - t| > \varepsilon) &\leq \lim_{n\to\infty} \frac{4\mathrm{Var}\eta_n}{\varepsilon^2} \\ &= \frac{4}{\varepsilon^2} \lim_{n\to\infty} \frac{\lfloor nt \rfloor (n - \lfloor nt \rfloor)}{n^2(n+1)} \\ &\leq \frac{4}{\varepsilon^2} \lim_{n\to\infty} \frac{nt(n-nt+1)}{n^3} \leq \frac{4}{\varepsilon^2} \lim_{n\to\infty} \frac{nt(n-nt+n)}{n^3} \\ &= \frac{4}{\varepsilon^2} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 t(2-t)}{n^3} = \frac{4}{\varepsilon^2} \lim_{n\to\infty} \frac{t(2-t)}{n} \\ &= 0 \ .\end{aligned}$$

□

### 1.6.2 Umkehrformel für stetige Zufallsgrößen

Es sei $\xi$ eine stetige Zufallsgröße mit $\mathbb{E}|\xi| < \infty$. Das heißt, $\xi$ besitzt eine stetige Verteilungsfunktion $F_\xi : \mathbb{R} \to [0,1]$. Dann ist auch die inverse Verteilungsfunktion $h : (0,1) \to \mathbb{R}$, definiert durch $h(y) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_\xi(x) \geq y\}$, stetig.
Im Folgenden sei $t \in (0,1)$ fest gewählt. Es seien die Zufallsgrößen $\eta_n$ gemäß Definition 1.9 verteilt mit den Verteilungsdichten auf $[0,1]$

$$p_n(x) := \begin{cases} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(\lfloor nt \rfloor)\Gamma(n - \lfloor nt \rfloor)} x^{\lfloor nt \rfloor - 1}(1-x)^{n - \lfloor nt \rfloor - 1} & , \text{für } n > n' \\ 1 & , \text{für } n \leq n' \ . \end{cases}$$

Hierbei ist wieder $n' := \max\left\{\frac{3}{t}+2, \frac{2}{1-t}+2\right\}$. Sie besitzen die Verteilungsfunktionen

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \int_0^x p_n(y)dy & 0 < x < 1 \\ 1 & \text{sonst} . \end{cases}$$

Aus Lemma 1.11 folgt, daß $F_n(x)$ in Verteilung gegen das Diracmaß an der Stelle t strebt,

$$F_n(x) \to F_{\delta_t}(x) = \begin{cases} 0 & x \le t \\ 1 & x > t . \end{cases}$$

Zum Beweis der Umkehrformel verwende ich den so genannten zweiten Satz von Helly (siehe Seite 205 in [6]).

**Lemma 1.12 (Zweiter Satz von Helly)** *Sei $f(x)$ eine stetige Funktion auf $[a, b]$ und die Folge $F_1(x), F_2(x), \ldots$ monoton nicht fallender, gleichmäßig beschränkter Funktionen konvergiere schwach gegen die Funktion $F(x)$ auf $[a, b]$. Seien noch a und b Stetigkeitsstellen der Funktion $F(x)$, dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)dF_n(x) = \int_a^b f(x)dF(x).$$

Wenn jetzt $\xi$ wie oben definiert ist, dann folgt aus $\mathbb{E}|\xi| < \infty$: $\mathbb{E}|h(\gamma)| < \infty$ für $\gamma$ in $[0, 1]$ gleichverteilt, da $h(\gamma) \sim \xi$.
Außerdem gilt für alle $x \in [0, 1]$

$$\int_0^1 |h(x)|x^{r-1}(1-x)^{s-1}dx < \int_0^1 |h(x)|dx = \mathbb{E}|h(\gamma)| < \infty ,$$

da $|h(x)| > |h(x)|x^r(1-x)^s$ für $x \in [0, 1]$ und alle $r, s \ge 0$.
Daraus folgt jetzt:

$$\int_0^1 |h(x)|dF_n(x) = \int_0^1 |h(x)|p_n(x)dx < \infty \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} . \tag{1.16}$$

Nun betrachten wir die Verteilungsdichten $p_n(x)$ für $n > n'$ noch etwas näher. Es gilt:

$$\begin{aligned}
p_n(x) &= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(\lfloor nt \rfloor)\Gamma(n-\lfloor nt \rfloor)} x^{\lfloor nt \rfloor -1}(1-x)^{n-\lfloor nt \rfloor -1} \\
&= \frac{(n-1)!}{(\lfloor nt \rfloor -1)!(n-\lfloor nt \rfloor -1)!} x^{\lfloor nt \rfloor -1}(1-x)^{n-\lfloor nt \rfloor -1} \\
&\leq \frac{(n-1)!}{(nt-2)!(n-nt-1)!} x^{nt-2}(1-x)^{n-nt-1} \\
&= \frac{(n)!}{(nt)!(n-nt)!} \frac{(nt-1)nt(n-nt)}{n} x^{nt-2}(1-x)^{n-nt-1} \\
&= \frac{(n)!}{(nt)!(n-nt)!}(nt-1)(nt-nt^2)x^{nt-2}(1-x)^{n-nt-1} \; .
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Stirling'schen Formel $n! = \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}\, c_n$ mit $c_n \to 1$ für $n \to \infty$ folgt:

$$\begin{aligned}
p_n(x) &\leq c_n \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \left(\frac{\mathrm{e}}{nt}\right)^{nt} \left(\frac{\mathrm{e}}{n-nt}\right)^{n-nt} \sqrt{\frac{2\pi n}{2\pi nt 2\pi(n-nt)}}\, (nt-1)(nt-nt^2)x^{nt-2}(1-x)^{n-nt-1} \\
&= c_n \frac{n^n}{(nt)^{nt}(n(1-t))^{n(1-t)}}\, (nt-1)\sqrt{\frac{nt-nt^2}{2\pi}}\, x^{nt-2}(1-x)^{n-nt-1} \\
&= c_n \frac{1}{t^{nt}(1-t)^{n(1-t)}}\, (nt-1)\sqrt{\frac{nt-nt^2}{2\pi}}\, x^{nt-2}(1-x)^{n-nt-1} \; ,
\end{aligned}$$

also

$$p_n(x) \leq c_n \frac{1}{t^{nt}(1-t)^{n(1-t)}}\, (nt-1)\sqrt{\frac{nt-nt^2}{2\pi}}\, x^{nt-2}(1-x)^{n-nt-1} \qquad \text{mit } c_n \to 1 \text{ für } n \to \infty \; . \tag{1.17}$$

Außerdem existiert für alle $n \in \mathbb{N}$ die erste Ableitung von $p_n(x)$ in $[0,1]$:

$$p_n'(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(\lfloor nt \rfloor)\Gamma(n-\lfloor nt \rfloor)}(x^{\lfloor nt \rfloor -2}(1-x)^{n-\lfloor nt \rfloor -2}(x(2-n)+\lfloor nt \rfloor -1)) & \text{, für } n > n' \\ 0 & \text{, für } n \leq n' \; . \end{cases}$$

Damit folgt

**Lemma 1.13** *Es sei $\xi$ eine stetige Zufallsgröße mit $\mathbb{E}|\xi| < \infty$ und inverser Verteilungsfunktion $h : (0,1) \to \mathbb{R}$. Dann existiert ein $a \in (0,t)$ mit*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^a h(x)dF_n(x) = 0$$

**Beweis:** Zunächst einmal folgt aus (1.17) mit $n > n'$ und $a \in (0, t)$:

$$\begin{aligned} p_n(x) &\le c_n \frac{1}{t^{nt}(1-t)^{n(1-t)}} \; (nt-1)\sqrt{\frac{nt-nt^2}{2\pi}} \; a^{nt-2} \\ &= c_n \left(\frac{1-t}{t}\right)^{nt} \left(\frac{1}{(1-t)^{\frac{1}{t}}}\right)^{nt} \; (nt-1)\sqrt{\frac{nt-nt^2}{2\pi}} \; a^{nt-2} \\ &= c_n \frac{nt-1}{a^2}\sqrt{\frac{nt-nt^2}{2\pi}} \left(a\frac{1-t}{t(1-t)^{\frac{1}{t}}}\right)^{nt} \; . \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir

$$(1) \quad \lim_{n\to\infty} p_n(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in [0,a] \text{ mit } 0 < a < \frac{t}{1-t}(1-t)^{\frac{1}{t}} < t \; .$$

Es bleibt noch zu zeigen, daß $p_n(x)$ gleichmäßig beschränkt ist auf $[0, a]$, um den Satz von Lebesgue anzuwenden. Für $n > n'$ erkennen wir sofort, $p'_n(x) \ge 0$ genau dann, wenn

$$x \le \frac{\lfloor nt \rfloor - 1}{n-2} \; .$$

Nun läßt sich abschätzen:

$$\frac{\lfloor nt \rfloor - 1}{n-2} \ge \frac{nt-2}{n-2} \ge t + \frac{2t-2}{n-2} \ge t - \frac{2}{n-2} \; .$$

Da $t - \frac{2}{n-2} > 0$ für $n > n'$ können wir folgern:

$$(2) \quad p'_n(x) \ge 0 \text{ für } x \in [0,a] \text{ mit } 0 < a < \frac{\lfloor mt \rfloor - 1}{m-2} \text{ mit } m := \min_{n\in\mathbb{N}}\{n > n'\} \; .$$

Insgesamt aus (1) und (2) erhält man für

$$0 < a < \min\left\{\frac{t}{1-t}(1-t)^{\frac{1}{t}}, \frac{\lfloor mt \rfloor - 1}{m-2}\right\} < t \text{ mit } m := \min_{n\in\mathbb{N}}\{n > \; n'\} \; :$$

- $$\lim_{n\to\infty} p_n(x) = 0 \qquad \text{für alle } x \in [0,a]$$

  und

- $$p_n(a) \ge p_n(x) \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und alle } x \in [0,a] \; ,$$

  da $p_n(x)$ monoton wachsend ist für $x \in [0, a]$ und alle $n \in \mathbb{N}$.

Wegen (1) gilt $p_n(a) \to 0$ für $n \to \infty$ und da alle $p_n$ stetig sind , haben wir:

$$|p_n(x)| \le d_a \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und alle } x \in [0,a] \text{ mit } d_a := \max_{n\in\mathbb{N}} p_n(a) \; .$$

Da $g_a(x) = d_a|h(x)|$ wegen (1.16) eine integrierbare Majorante für $h(x)p_n(x)$ auf $[0,a]$ ist, haben wir mit dem Satz von Lebesgue:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^a h(x)dF_n(x) &= \lim_{n\to\infty}\int_0^a h(x)p_n(x)dx\\ &= \int_0^a h(x)\lim_{n\to\infty} p_n(x)dx\\ &= 0\end{aligned}$$

□

**Lemma 1.14** *Es sei $\xi$ eine stetige Zufallsgröße mit $\mathbb{E}|\xi| < \infty$ und inverser Verteilungsfunktion $h : (0,1) \to \mathbb{R}$. Dann existiert ein $b \in (t,1)$ mit*

$$\lim_{n\to\infty}\int_b^1 h(x)dF_n(x) = 0$$

**Beweis:** Hier ist die Beweisidee ähnlich zu der in Lemma 1.13. Zunächst erhalten wir aus (1.17) mit $n > n'$ und $b \in (t,1)$:

$$\begin{aligned}p_n(x) &\le c_n \frac{1}{t^{nt}(1-t)^{n(1-t)}}\,(nt-1)\sqrt{\frac{nt-nt^2}{2\pi}}\,(1-b)^{n-nt-1}\\ &= c_n\left(\frac{1}{1-t}\right)^{n-nt} t^{n-nt}\left(\frac{1}{t}\right)^{n}\,(nt-1)\sqrt{\frac{nt-nt^2}{2\pi}}\,(1-b)^{n-nt-1}\\ &= c_n\left(\frac{t}{1-t}\right)^{n-nt}\left(\left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{1-t}}\right)^{n-nt}\,(nt-1)\sqrt{\frac{nt-nt^2}{2\pi}}\,(1-b)^{n-nt-1}\\ &= \frac{c_n}{1-b}\,(nt-1)\sqrt{\frac{nt-nt^2}{2\pi}}\left((1-b)\frac{t}{1-t}\left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{1-t}}\right)^{n-nt}.\end{aligned}$$

Und daraus folgt nun

$$\lim_{n\to\infty} p_n(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in [b,1] \text{ mit } 1-b < \frac{1-t}{t}\,t^{\frac{1}{1-t}}\ ,$$

also

$$(3)\qquad \lim_{n\to\infty} p_n(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in [b,1] \text{ mit } 1 > b > 1-\frac{1-t}{t}\,t^{\frac{1}{1-t}} > t\ .$$

Man erkennt auch hier aus der ersten Ableitung: $p_n'(x) \le 0$ genau dann, wenn

$$x \ge \frac{\lfloor nt\rfloor - 1}{n-2}\ .$$

Da gilt

$$\frac{\lfloor nt \rfloor - 1}{n-2} \leq \frac{nt-1}{n-2} = t + \frac{2t-1}{n-2} \leq t + \frac{1}{n-2} \ ,$$

und da $t + \frac{1}{n-2} < 1$ für $n > n'$, haben wir

$$(4) \quad p_n'(x) \leq 0 \text{ für } x \in [b,1] \text{ mit } 1 > b > \frac{\lfloor mt \rfloor - 1}{m-2} \text{ mit } m := \min_{n \in \mathbb{N}} \{n > n'\} \ .$$

Insgesamt erhält man aus (3) und (4) für $1 > b > \max\left\{1 - \frac{1-t}{t} t^{\frac{1}{1-t}}, \frac{\lfloor mt \rfloor - 1}{m-2}\right\} > t$ mit $m := \min_{n \in \mathbb{N}}\{n > n'\}$:

-
$$\lim_{n \to \infty} p_n(x) = 0 \qquad \text{für alle } x \in [b,1]$$
  und

-
$$p_n(b) \geq p_n(x) \text{ für alle } n > n' \text{ und alle } x \in [b,1] \ ,$$
  da $p_n(x)$ monoton fallend ist für alle $x \in [b,1]$ und alle $n > n'$
  und

- für $n \leq n'$ gilt,
$$\max_{x \in [b,1]} p_n(x) = 1 \ .$$

Wegen (3) gilt $p_n(b) \to 0$ für $n \to \infty$ und da $p_n$ stetig ist für alle $n \in \mathbb{N}$, haben wir:

$$|p_n(x)| \leq d_b \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und alle } x \in [b,1], \text{ mit } d_b := \max\left\{\max_{n > n'} p_n(b), 1\right\} \ .$$

Da $g_b(x) = d_b |h(x)|$ wegen (1.16) eine integrierbare Majorante für $h(x)p_n(x)$ auf $[b,1]$ ist, haben wir mit dem Satz von Lebesgue:

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to \infty} \int_b^1 h(x) dF_n(x) &= \lim_{n \to \infty} \int_b^1 h(x) p_n(x) dx \\
&= \int_b^1 h(x) \lim_{n \to \infty} p_n(x) dx \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

Nach den vorbereitenden Lemmas gilt nun folgender Satz.

**Satz 1.16** *Es sei $\xi$ eine stetige Zufallsgröße mit $\mathbb{E}|\xi| < \infty$. Dann gilt für die inverse Verteilungsfunktion $h : (0,1) \to \mathbb{R}$:*

$$h(t) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 h(x) dF_n(x) \ .$$

*Dabei ist $0 < t < 1$ und $F_n$ die Verteilungsfunktion von $\eta_n \sim \beta(\lfloor nt \rfloor, n - \lfloor nt \rfloor)$.*

**Beweis:** Für festes $t \in (0,1)$ finden wir ein $a \in (0,t)$ und ein $b \in (t,1)$ welche wie bei Lemma 1.13 und Lemma 1.14 gewählt werden. So gilt:

$$\int_0^1 h(x)dF_n(x) = \int_a^b h(x)dF_n(x) + \int_0^a h(x)dF_n(x) + \int_b^1 h(x)dF_n(x) \ .$$

Nach Lemma 1.13 gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^a h(x)dF_n(x) = 0 \ ,$$

und nach Lemma 1.14:

$$\lim_{n\to\infty} \int_b^1 h(x)dF_n(x) = 0 \ .$$

Da $h(x)$ stetig ist auf $[a,b]$ und da $t \in [a,b]$ ist, gilt nun mit dem Satz von Helly

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_a^b h(x)dF_n(x) &= \int_a^b h(x)dF_{\delta_t}(x) \\ &= h(t) \ . \end{aligned}$$

Also gilt insgesamt

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 h(x)dF_n(x) = h(t) \ .$$

□

**Theorem 1 (Umkehrformel für stetige Zufallsgrößen)** *Für eine stetige Zufallsgröße $\xi$ mit $\mathbb{E}|\xi| < \infty$ und $0 < t < 1$ gilt:*

$$h(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!}{(\lfloor nt \rfloor - 1)!} (-1)^{\lfloor nt \rfloor} \sum_{k=\lfloor nt \rfloor}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(k - \lfloor nt \rfloor)!(n-k-1)!} \frac{1}{k} \beta_k \ .$$

*Dabei sind die $\beta_k$ für $k = 1, 2, \ldots$ die Hoeffding-Koeffizienten von $\xi$.*

**Beweis:** Aus Satz 1.16 folgt:

$$\begin{aligned} h(t) &= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 h(x)dF_n(x) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 h(x)p_n(x)dx \ . \end{aligned}$$

Da wir den Limes für n gegen unendlich betrachten, kann ohne Einschränkung angenommen werden $n > n'$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} h(t) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(\lfloor nt\rfloor)\Gamma(n-\lfloor nt\rfloor)} \int_0^1 x^{\lfloor nt\rfloor-1}(1-x)^{n-\lfloor nt\rfloor-1}h(x)dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(\lfloor nt\rfloor)\Gamma(n-\lfloor nt\rfloor)} \int_0^1 x^{\lfloor nt\rfloor-1}h(x) \sum_{k=0}^{n-\lfloor nt\rfloor-1} \binom{n-\lfloor nt\rfloor-1}{k}(-1)^k x^k dx \ . \end{aligned}$$

Die Substitution $l = k + \lfloor nt\rfloor$ ergibt

$$\begin{aligned} h(t) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(\lfloor nt\rfloor)\Gamma(n-\lfloor nt\rfloor)} \int_0^1 \sum_{l=\lfloor nt\rfloor}^{n-1} \binom{n-\lfloor nt\rfloor-1}{n-l-1}(-1)^{l-\lfloor nt\rfloor} x^{l-1}h(x)dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(\lfloor nt\rfloor)\Gamma(n-\lfloor nt\rfloor)} \sum_{l=\lfloor nt\rfloor}^{n-1} \binom{n-\lfloor nt\rfloor-1}{n-l-1}(-1)^{l-\lfloor nt\rfloor} \int_0^1 x^{l-1}h(x)dx \ . \end{aligned}$$

Da jetzt $\int_0^1 x^{l-1}h(x)dx = \frac{1}{l}\beta_l$ ist, gilt weiterhin:

$$\begin{aligned} h(t) &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!}{(\lfloor nt\rfloor-1)!(n-\lfloor nt\rfloor-1)!} \sum_{l=\lfloor nt\rfloor}^{n-1} \frac{(n-\lfloor nt\rfloor-1)!}{(n-l-1)!(l-\lfloor nt\rfloor)!}(-1)^{l-\lfloor nt\rfloor}\frac{1}{l}\beta_l \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!}{(\lfloor nt\rfloor-1)!}(-1)^{\lfloor nt\rfloor} \sum_{l=\lfloor nt\rfloor}^{n-1} \frac{(-1)^l}{(n-l-1)!(l-\lfloor nt\rfloor)!}\frac{1}{l}\beta_l \ . \end{aligned}$$

□

Diese Umkehrformel ist wirklich erstaunlich. Man sieht, daß bei Zufallsgrößen mit stetigen Verteilungsfunktion in der Summe jeweils die ersten $\lfloor nt\rfloor - 1$ Hoeffding-Koeffizienten nicht erforderlich sind, um die inverse Verteilungsfunktion an der Stelle t zu berechnen.

# 2 Mehrdimensionaler Fall

## 2.1 Vitale-Körper: Definition und Eigenschaften

**Allgemeines**

Nun wollen wir die Idee der Hoeffding-Koeffizienten im Eindimensionalen auf Zufallsvektoren im $\mathbb{R}^d$ übertragen. Dies machen wir mit Hilfe des Ansatzes von Richard A. Vitale ([8]), allerdings nicht wie er in bestimmten Banachräumen sondern nur im $\mathbb{R}^d$. Dazu brauchen wir erst einmal eine Definition des Erwartungswertes im $\mathbb{R}^d$.
Es ist wieder $[\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}]$ der zu Grunde liegende Wahrscheinlichkeitsraum. $\mathbb{R}^d$ ist der d-dimensionale euklidische Raum mit der $\sigma$-Algebra der Borelmengen $\mathcal{R}_d$ und mit dem kanonischem Skalarprodukt $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_d y_d$ von $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$.
Mit $\mathbb{K}^d$ wird die Menge der nichtleeren, kompakten, konvexen Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ mit $\sigma$-Algebra $\mathcal{K}_d$ bezeichnet und mit $\mathcal{S}^{d-1}$ die Einheitssphäre vom $\mathbb{R}^d$

$$\mathcal{S}^{d-1} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : \|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle} = 1\} \ .$$

Ein Zufallsvektor $\boldsymbol{\xi}$ ist eine ist eine $\mathcal{F}, \mathcal{R}_d$-meßbare Abbildung $\boldsymbol{\xi} : \Omega \to \mathbb{R}^d$ und ein zufälliger konvexer Körper $\mathcal{M}$ ist eine $\mathcal{F}, \mathcal{K}_d$-meßbare Abbildung $\mathcal{M} : \Omega \to \mathbb{K}^d$.

**Definition 2.1** *Man sagt, der d-dimensionale Zufallsvektor* $\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_d \end{pmatrix}$ *besitzt einen Erwartungswert, wenn für alle* $i = 1, \ldots, d$ *gilt* $\mathbb{E}|\xi_i| < \infty$. *Dann wird mit*

$$\mathbb{E}\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} \mathbb{E}\xi_1 \\ \vdots \\ \mathbb{E}\xi_d \end{pmatrix}$$

*der Erwartungswert von* $\boldsymbol{\xi}$ *bezeichnet.*

**Lemma 2.1** *Der Zufallsvektor* $\boldsymbol{\xi}$ *besitzt genau dann einen Erwartungswert, wenn für die Zufallsgröße* $\eta = \|\boldsymbol{\xi}\|$ *gilt* $\mathbb{E}\eta < \infty$.

**Beweis:** Für alle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_d^2}$$

und daraus folgt das Lemma.

□

Für die Untersuchung von zufälligen Mengen bietet sich die sogenannte Stützfunktion an. Mit Hilfe der Stützfunktion läßt sich dann später auch der Begriff des Mengenerwartungswertes einführen.

**Definition 2.2** *Für eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^d$ ist die Stützfunktion $h_M : \mathcal{S}^{d-1} \to \mathbb{R}^*$ definiert durch*

$$h_M(\boldsymbol{u}) = \sup_{\boldsymbol{x} \in M} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u} \rangle \quad , \text{ für } \boldsymbol{u} \in \mathcal{S}^{d-1}.$$

**Bemerkung 1:**

(a) Wenn $M$ ein konvexer Körper ist, so kann man, auf Grund der Abgeschlossenheit, das Supremum durch das Maximum ersetzen.

(b) Die Stützfunktion an der Stelle $\boldsymbol{u}$ gibt den Abstand der Stützgeraden an $M$ mit Normalenvektor $\boldsymbol{u}$ vom Ursprung an. Mit diesen Stützgeraden lassen sich die Stützhalbebenen $H_M(\boldsymbol{u})$ definieren

$$H_M(\boldsymbol{u}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u} \rangle \leq h_M(\boldsymbol{u})\} \ .$$

Nun sind die konvexen Körper eindeutig durch ihre Stützfunktion definiert, da gilt

$$M = \bigcap_{\boldsymbol{u} \in \mathcal{S}^{d-1}} H_M(\boldsymbol{u}) \ .$$

(c) Wenn $M$ und $N$ zwei konvexe Körper sind, dann gilt für ihre Stützfunktionen:

$$M = N \Leftrightarrow h_M = h_N \ , \tag{2.1}$$
$$N \subseteq M \Leftrightarrow h_N \leq h_M \ , \tag{2.2}$$
$$h_{M+N} = h_M + h_N \ , \tag{2.3}$$
$$h_{\mathrm{conv}\{M \cup N\}} = \max\{h_M, h_N\} \qquad \text{und} \tag{2.4}$$
$$\|M\| = \max\{\|\boldsymbol{x}\| : \boldsymbol{x} \in M\} = \|h_M\| = \max\{\|h_M(\boldsymbol{u})\| : \boldsymbol{u} \in \mathcal{S}^{d-1}\} \ , \tag{2.5}$$

dabei bezeichnet $M + N = \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} : \boldsymbol{x} \in M \text{ und } \boldsymbol{y} \in N\}$ die Minkowski Summe.

Von nun an werden nur noch zufällige konvexe Körper $\mathcal{M} \in \mathcal{K}_d$ betrachtet. Somit haben wir also eine eineindeutige Zuordnung zwischen den zufälligen konvexen Körpern und der Menge der zufälligen Stützfunktionen.

**Definition 2.3** *Man sagt, der zufällige konvexe Körper $\mathcal{M}$ besitzt einen* Mengenerwartungswert *(Bochner-Erwartungswert), wenn $\mathbb{E}\|\mathcal{M}\| = \mathbb{E}\|h_{\mathcal{M}}\| < \infty$.*
*Wenn $\mathbb{E}\|\mathcal{M}\| < \infty$ ist, dann bezeichnet*

$$\mathbb{E}\mathcal{M} = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u} \rangle \leq \mathbb{E}h_{\mathcal{M}} \text{ für alle } \boldsymbol{u} \in \mathcal{S}^{d-1}\right\}$$

*den Mengenerwartungswert von $\mathcal{M}$.*

**Bemerkung 2:**

(a) Da für alle $\boldsymbol{u} \in \mathcal{S}^{d-1}$ immer $h_{\mathcal{M}}(\boldsymbol{u}) \leq \|h_{\mathcal{M}}\|$ ist, gilt $\mathbb{E}\max_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{M}} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}\rangle = \mathbb{E}h_{\mathcal{M}}(\boldsymbol{u}) \leq \mathbb{E}\|h_{\mathcal{M}}\| < \infty$.

(b) Es läßt sich zeigen(siehe [2]), daß $\mathbb{E}\mathcal{M}$ auch wieder eine kompakte, konvexe Menge ist und es gilt $\mathbb{E}h_{\mathcal{M}} = h_{\mathbb{E}\mathcal{M}}$.

Ein anderer Zugang zum Mengenerwartungswert erfolgt durch die sogenannten Selektoren.

**Definition 2.4** *Ein Zufallsvektor $\boldsymbol{\xi}$ heißt* Selektor *des zufälligen konvexen Körpers $\mathcal{M}$, wenn gilt $\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{M}$ fast sicher.*

Nun kann man über die Selektoren auch einen Erwartungswert definieren:

$$\mathbb{E}'\mathcal{M} = \{\mathbb{E}\boldsymbol{\xi} : \boldsymbol{\xi} \text{ ist Selektor von } \mathcal{M}\} .$$

Dieser wird als Aumann-Erwartungswert bezeichnet und es gilt für zufällige konvexe Körper folgender Satz (siehe [2])[1].

**Satz 2.1** *Es sei $\mathcal{M}$ ein zufälliger konvexer Körper mit $\mathbb{E}\|\mathcal{M}\| < \infty$. Dann gilt*

$$\mathbb{E}\mathcal{M} = \{\mathbb{E}\boldsymbol{\xi} : \boldsymbol{\xi} \textit{ ist Selektor von } \mathcal{M}\}, \textit{ also } \mathbb{E}'\mathcal{M} = \mathbb{E}\mathcal{M}.$$

### Definition der Vitale-Körper

Schließlich wollen wir zur Definition der mehrdimensionalen Hoeffding-Koeffizienten vordringen. Dabei definieren wir für einen Zufallsvektor $\boldsymbol{\xi}$ mit $\mathbb{E}\|\boldsymbol{\xi}\| < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ die zufälligen konvexen Körper $\mathcal{K}_n = \operatorname{conv}\{\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_n\}$ und bilden deren Mengenerwartungswert. Die $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \ldots$ sind dabei wieder unabhängig, identisch gemäß $\mathrm{P}_{\boldsymbol{\xi}}$ verteilt und wir meinen mit $\operatorname{conv}\{N\}$ immer die abgeschlossene konvexe Hülle von $N \subseteq \mathbb{R}^d$.

**Definition 2.5 (Vitale-Körper)** *Es sei $\boldsymbol{\xi}$ ein Zufallsvektor mit Erwartungswert. Dann soll die Größe*

$$\mathbb{K}_n = \mathbb{E}\operatorname{conv}\{\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_n\}$$

Vitale-Körper *$n$-ter Ordnung heißen. Dabei sind die $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \ldots$ unabhängig identisch gemäß $\mathrm{P}_{\boldsymbol{\xi}}$ verteilt.*

Laut Definition des Mengenerwartungswertes gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{K}_n &= \mathbb{E}\operatorname{conv}\{\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_n\}\\ &= \mathbb{E}\mathcal{K}_n = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}\rangle \leq \mathbb{E}h_{\mathcal{K}_n}(\boldsymbol{u}), \text{ für alle } \boldsymbol{u} \in \mathcal{S}^{d-1}\}\\ &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}\rangle \leq \mathbb{E}\max_{\boldsymbol{y}\in\mathcal{K}_n} \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{u}\rangle, \text{ für alle } \boldsymbol{u} \in \mathcal{S}^{d-1}\} .\end{aligned}$$

[1] Der Satz erscheint ohne Beweis dafür aber in offensichtlicherer Form bei [3] auf Seite 301. Hier ist nur zu beachten, daß der Aumann Erwartungswert eines konvexen Körpers wieder konvex ist (somit können wir uns die Voraussetzung, daß $\mathcal{P}$ atomfrei ist, sparen) .

Da $\operatorname{conv}\{\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_n\} = \operatorname{conv}\{\{\boldsymbol{\xi}_1\} \cup \cdots \cup \{\boldsymbol{\xi}_n\}\}$ ist, gilt mit Gleichung (2.4)

$$h_{\mathcal{K}_n}(\boldsymbol{u}) = \max\{h_{\{\boldsymbol{\xi}_1\}}(\boldsymbol{u}), \ldots, h_{\{\boldsymbol{\xi}_n\}}(\boldsymbol{u})\} = \max_{i=1,\ldots,n} \langle\, \boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{u} \rangle \ .$$

Demnach kann man für $\mathbb{K}_n$ auch schreiben

$$\begin{aligned}\mathbb{K}_n &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : \langle\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u} \rangle \leq \mathbb{E} h_{\mathcal{K}_n}(\boldsymbol{u}), \text{ für alle } \boldsymbol{u} \in \mathcal{S}^{d-1}\} \\ &= \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : \langle\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u} \rangle \leq \mathbb{E} \max_{i=1,\ldots,n} \langle\, \boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{u} \rangle \text{, für alle } \boldsymbol{u} \in \mathcal{S}^{d-1}\right\} \ .\end{aligned}$$

**Eigenschaften**

**Lemma 2.2** *Zu einen Zufallsvektor* $\boldsymbol{\xi}$ *mit* $\mathbb{E}\|\boldsymbol{\xi}\| < \infty$ *und seien die Vitale-Körper* $\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2, \ldots$ *von* $\boldsymbol{\xi}$ *wie oben definiert. Dann sind die Vitale-Körper alle kompakt und konvex und es gilt*

$$\mathbb{K}_1 \subseteq \mathbb{K}_2 \subseteq \mathbb{K}_3 \subseteq \cdots \ .$$

**Beweis:** Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, da $\mathbb{E}\|\boldsymbol{\xi}\| < \infty$ ist, für $\mathcal{K}_n = \operatorname{conv}\{\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_n\}$

$$\begin{aligned}\|\mathcal{K}_n\| &= \max\{\|\boldsymbol{\eta}\| : \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{K}_n\} = \max\{\|\boldsymbol{\xi}_1\|, \ldots, \|\boldsymbol{\xi}_n\|\} \\ &\leq \sum_{i=1}^n \|\boldsymbol{\xi}_i\|\end{aligned}$$

und daraus folgt

$$\mathbb{E}\|\mathcal{K}_n\| \leq \mathbb{E} \sum_{i=1}^n \|\boldsymbol{\xi}_i\| \leq n\mathbb{E}\|\boldsymbol{\xi}\| < \infty \ .$$

Somit sind die Vitale-Körper beschränkt und, da die $\mathcal{K}_n$ konvex und abgeschlossen sind, sind für alle $n \in \mathbb{N}$ die Vitale-Körper von $\boldsymbol{\xi}$ kompakt und konvex, also zufällige konvexe Körper. Natürlich gilt

$$\mathcal{K}_n = \operatorname{conv}\{\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_n\} \subseteq \operatorname{conv}\{\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_n, \boldsymbol{\xi}_{n+1}\} = \mathcal{K}_{n+1} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Man sieht jetzt auch, daß die Vitale-Körper eines Zufallsvektors eine Folge von aufsteigenden Mengen bilden.

$\square$

**Bemerkung 3:** Die Vitale-Körper sind zwar für alle $n \in \mathbb{N}$ beschränkt, aber sie sind nicht gleichmäßig beschränkt. Dies wird später am Beispiel der d-dimensionalen Normalverteilung klar. Es approximieren die Vitale-Körper wieder die konvexe Hülle des Trägers der zu Grunde liegenden Verteilung, was aber erst später gezeigt werden soll.

Ähnlich der Linearität der Hoeffding-Koeffizienten gibt es eine Eigenschaft der Vitale-Körper von Zufallsvektoren. Im Folgenden wird ein Vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ als Spaltenmatrix aufgefaßt.

**Lemma 2.3** *Es sei $\boldsymbol{\xi}$ ein d-dimensionaler Zufallsvektor mit $\mathbb{E}\|\boldsymbol{\xi}\| < \infty$. Außerdem sei $\boldsymbol{A}$ eine $r \times d$ Matrix und $\mathbb{K}_n$ seien die Vitale-Körper von $\boldsymbol{\xi}$. Dann besitzt der r-dimensionale Vektor $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}$ die Vitale-Körper*

$$\widetilde{\mathbb{K}}_n = \boldsymbol{A}\mathbb{K}_n \ ,$$

*dabei ist $\boldsymbol{A}M = \{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in M\}$ für $M \subset \mathbb{R}^d$ und $\boldsymbol{A}$ eine $r \times d$ Matrix.*

**Beweis:** Es sei $\boldsymbol{A}$ eine $r \times d$ Matrix, welche gegeben ist durch

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots & a_{1d} \\ \vdots \quad \ddots & \vdots \\ a_{r1} \ldots & a_{rd} \end{pmatrix} .$$

Für die $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}$ kann man die $\widetilde{\mathcal{K}}_n = \operatorname{conv}\{\boldsymbol{\eta}_1, \ldots, \boldsymbol{\eta}_n\}$ bestimmen durch

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{K}}_n &= \operatorname{conv}\{\boldsymbol{\eta}_1, \ldots, \boldsymbol{\eta}_n\} = \operatorname{conv}\{\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_n\} \\ &= \boldsymbol{A}\operatorname{conv}\{\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_n\} = \boldsymbol{A}\mathcal{K}_n \ , \end{aligned}$$

dabei ist $\mathcal{K}_n = \operatorname{conv}\{\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_n\}$. Nun gilt für den Mengenerwartungswert eines zufälligen konvexen Körpers $\mathcal{M}$:

$$\boldsymbol{A}(\mathbb{E}\mathcal{M}) = \mathbb{E}(\boldsymbol{A}\mathcal{M}) \ . \tag{2.6}$$

Dies erhält man indem man zur Definition des Mengenerwartungswertes über die Selektoren zurück geht

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}(\mathbb{E}\mathcal{M}) &= \boldsymbol{A}\left\{\mathbb{E}\boldsymbol{\xi} : \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{M} \text{ fast sicher}\right\} \\ &= \boldsymbol{A}\left\{\begin{pmatrix} \mathbb{E}\xi_1 \\ \vdots \\ \mathbb{E}\xi_d \end{pmatrix} : \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{M} \text{ fast sicher}\right\} \\ &= \left\{\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^d a_{1k}\mathbb{E}\xi_1 \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^d a_{rk}\mathbb{E}\xi_d \end{pmatrix} : \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{M} \text{ fast sicher}\right\} \\ &= \left\{\begin{pmatrix} \mathbb{E}\sum_{k=1}^d a_{1k}\xi_1 \\ \vdots \\ \mathbb{E}\sum_{k=1}^d a_{rk}\xi_d \end{pmatrix} : \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{M} \text{ fast sicher}\right\} \\ &= \{\mathbb{E}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}) : \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{M} \text{ fast sicher}\} \\ &= \{\mathbb{E}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}) : \boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi} \in \boldsymbol{A}\mathcal{M} \text{ fast sicher}\} \\ &= \mathbb{E}(\boldsymbol{A}\mathcal{M}) \ . \end{aligned}$$

Hier wurde natürlich wieder die Linearität des Erwartungswertes ausgenutzt.
Fügen wir alles zusammen erhalten wir für die Vitale-Körper $\widetilde{\mathbb{K}}_n$ von $\boldsymbol{\eta}$

$$\widetilde{\mathbb{K}}_n = \mathbb{E}\widetilde{\mathcal{K}}_n = \mathbb{E}(\boldsymbol{A}\mathcal{K}_n) = \boldsymbol{A}\mathbb{E}\mathcal{K}_n = \boldsymbol{A}\mathbb{K}_n \ .$$

□

**Folgerung 1** *Es sei* $\boldsymbol{\xi}$ *ein d-dimensionaler Zufallsvektor mit* $\mathbb{E}\|\boldsymbol{\xi}\| < \infty$. *Außerdem sei* $\boldsymbol{A}$ *eine* $r \times d$ *Matrix,* $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^r$ *und* $\mathbb{K}_n$ *seien die Vitale-Körper von* $\boldsymbol{\xi}$. *Dann besitzt* $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{b}$ *die Vitale-Körper*

$$\widetilde{\mathbb{K}}_n = \boldsymbol{A}\mathbb{K}_n + \boldsymbol{b} \ .$$

**Beweis:** Dies folgt direkt aus der Linearität des Erwartungswertes, des vorherigen Lemmas und der Vektorraumstruktur des $\mathbb{R}^d$. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbb{K}}_n &= \mathbb{E}\mathrm{conv}\{\boldsymbol{\eta}_1, \ldots, \boldsymbol{\eta}_n\} = \mathbb{E}\mathrm{conv}\{\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{b}, \ldots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_n + \boldsymbol{b}\} \\ &= \mathbb{E}\left(\mathrm{conv}\{\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_n\} + \boldsymbol{b}\right) \\ &= \mathbb{E}\mathrm{conv}\{\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_n\} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{A}\mathbb{K}_n + \boldsymbol{b} \ .\end{aligned}$$

□

### Zusammenhang zwischen Hoeffding-Koeffizienten und Vitale-Körpern

Betrachten wir einmal die Definition der Vitale-Körper für d=1. Nun ist die Einheitssphäre gegeben durch $\mathcal{S}^0 = \{-1, 1\}$ und ein eindimensionaler Zufallsvektor kann natürlich als Zufallsgröße betrachtet werden. Nun gilt für die Vitale-Körper einer Zufallsgröße $\xi$ mit Erwartungswert

$$\begin{aligned}\mathbb{K}_n &= \left\{x \in \mathbb{R} : \langle x, u\rangle \leq \mathbb{E} \max_{i=1,\ldots,n} \langle \xi_i, u\rangle \ \text{ mit } u \in \mathcal{S}^0\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : \langle \xi, u\rangle \leq \mathbb{E} \max_{i=1,\ldots,n} \langle \xi_i, u\rangle \ \text{ mit } u \in \{-1, 1\}\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : -x \leq \mathbb{E} \max_{i=1,\ldots,n} \{-\xi_i\} \text{ und } x \leq \mathbb{E} \max_{i=1,\ldots,n} \{\xi_i\}\right\} \ .\end{aligned}$$

Da gilt $\max\{-\xi_1, \ldots, -\xi_n\} = -\min\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$, haben wir damit

$$\begin{aligned}\mathbb{K}_n &= \left\{x \in \mathbb{R} : -x \leq -\mathbb{E} \min_{i=1,\ldots,n} \{\xi_i\} \text{ und } x \leq \mathbb{E} \max_{i=1,\ldots,n} \{\xi_i\}\right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : \mathbb{E}\min\{\xi_1, \ldots \xi_n\} \leq x \leq \mathbb{E}\max\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}\} \\ &= [\mathbb{E}\min\{\xi_1, \ldots \xi_n\}, \mathbb{E}\max\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}] \\ &= [\alpha_n, \beta_n] \ .\end{aligned}$$

Also sieht man direkt, daß die Vitale-Körper die natürliche Verallgemeinerung der Hoeffding-Koeffizienten sind. Insbesondere sind im eindimensionalen die Hoeffding-Koeffizienten aus den Vitale-Körper bestimmbar und umgekehrt.

Es sei $\boldsymbol{\xi}$ ein d-dimensionaler Zufallsvektor mit $\mathbb{E}\|\boldsymbol{\xi}\| < \infty$. Dann sind die Vitale-Körper von $\boldsymbol{\xi}$ gegeben durch

$$\mathbb{K}_n = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : \langle\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u} \rangle \leq \mathbb{E} \max_{i=1,\ldots,n} \langle\, \boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{u} \rangle \,, \text{ für alle } \boldsymbol{u} \in \mathcal{S}^{d-1} \right\} \;.$$

Nun setzen wir für ein festes $\boldsymbol{u} \in \mathcal{S}^{d-1}$

$$\eta_i = \langle\, \boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{u} \rangle \;\text{ und }\; \eta = \langle\, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{u} \rangle \;.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \max_{i=1,\ldots,n} \langle\, \boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{u} \rangle &= \mathbb{E} \max_{i=1,\ldots,n} \\
&= \mathbb{E} \max\{\eta_1, \ldots, \eta_n\} \\
&= \beta_n \text{ , wenn } \beta_n \text{ die Hoeffding-Koeffizienten von } \eta \text{ sind.}
\end{aligned}$$

Also kann die Aufgabe, für einen beliebigen d-dimensionalen Zufallsvektor $\boldsymbol{\xi}$ mit $\mathbb{E}\|\boldsymbol{\xi}\| < \infty$ die Vitale-Körper zu berechnen, auf die Berechnung der Hoeffding-Koeffizienten von $\langle\, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{u} \rangle$ für alle $\boldsymbol{u} \in \mathcal{S}^{d-1}$ zurückgeführt werden.

## 2.2 Beispiele

### 2.2.1 Gleichverteilung in der Kugel

Zunächst seien die d-dimensionalen Zufallsvektoren $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \ldots$ unabhängig identisch in der Einheitskugel $B_1(0) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : \|\boldsymbol{x}\| \leq 1\}$ des $\mathbb{R}^d$ gleichverteilt. Um die Vitale-Körper von $\boldsymbol{\gamma}$ zu bestimmen, benötigen wir das Verteilungsgesetz von $\eta = \langle\, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{u} \rangle$ für $\boldsymbol{u} \in \mathcal{S}^{d-1}$. Das Verteilungsgesetz von $\boldsymbol{\gamma}$ ist aber drehungsinvariant, also genügt es dieses Skalarprodukt für $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ zu berechnen.

Die $\boldsymbol{\gamma_k} = \begin{pmatrix} \gamma_1^k \\ \vdots \\ \gamma_d^k \end{pmatrix}$ besitzen die Verteilungsdichte $p_d : \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$, mit $p_d(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\kappa_d} \mathrm{I}_{B_1(0)}(\boldsymbol{x})$. Hier bezeichnet

$$\kappa_d = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(1 + d/2)} \tag{2.7}$$

das Volumen der d-dimensionalen Einheitskugel. Für $\eta = \langle\, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{e} \rangle = \gamma_1$ und $f : (-1, 1) \to [0, \infty)$ meßbar, gilt nun

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} f(\eta) &= \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(\langle\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{e} \rangle) p_d(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \\
&= \frac{1}{\kappa_d} \int\limits_{-1}^{1} dx_1 f(x_1) \int\limits_{-1}^{1} dx_2 \cdots \int\limits_{-1}^{1} dx_d \mathrm{I}_{B_1(0)}(x_1, \ldots, x_d) \;.
\end{aligned}$$

Offensichtlich ist $\int_{-1}^{1} dx_2 \cdots \int_{-1}^{1} dx_d \mathrm{I}_{B_1(0)}(x_1, \ldots, x_d)$ gleich dem Volumen einer (d-1)-dimensionalen Kugel mit Radius $\sqrt{1-x_1^2}$. Somit erhalten wir

$$\mathbb{E} f(\eta) = \frac{1}{\kappa_d} \int\limits_{-1}^{1} dx_1 f(x_1) \sqrt{1-x_1^2}^{\,d-1} \kappa_{d-1} \ .$$

Also besitzt $\eta$ die Verteilungsdichte $q_d : \mathbb{R} \to [0, \infty)$

$$\begin{aligned} q_d(x) &= \mathrm{I}_{[-1,1]}(x) \frac{\kappa_{d-1}}{\kappa_d} \sqrt{1-x^2}^{\,d-1} \quad \text{oder mit (2.7)} \\ q_d(x) &= \mathrm{I}_{[-1,1]}(x) \frac{\Gamma(1+\frac{d}{2})}{\Gamma(\frac{1+d}{2})\sqrt{\pi}} \sqrt{1-x^2}^{\,d-1} \ . \end{aligned}$$

Mit Hilfe von $q_d$ können wir die Verteilungsfunktion $F_d : \mathbb{R} \to [0, 1]$ von $\eta$ berechnen und erhalten mit der Formel (1.8) die Hoeffding-Koeffizienten $\beta_n^d$ von $\eta$. Damit haben wir auch die Vitale-Körper von $\boldsymbol{\gamma}$, denn es gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_n^d &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : \langle\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u} \rangle \le \mathbb{E} \max_{i=1,\ldots,n} \langle\, \boldsymbol{\gamma}_i, \boldsymbol{u} \rangle \ \text{für alle } \boldsymbol{u} \in \mathcal{S}^{d-1}\} \\ &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : \langle\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u} \rangle \le \mathbb{E} \max\{\eta_1, \ldots, \eta_n\} \ \text{für alle } \boldsymbol{u} \in \mathcal{S}^{d-1}\} \ , \end{aligned}$$

da $\eta_i = \langle\, \boldsymbol{\gamma}_i, \boldsymbol{u} \rangle$ und da $\gamma$ drehungsinvariant ist. Damit gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_n^d &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : \langle\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u} \rangle \le \beta_n^d \ \text{für alle } \boldsymbol{u} \in \mathcal{S}^{d-1}\} \\ &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : \|x\| \le \beta_n^d\} \ . \end{aligned}$$

Also ergeben sich als Vitale-Körper Kugeln um den Ursprung mit Radius $\beta_n^d$.

Speziell $d = 3$: Hier besitzt $\eta$ die Verteilungsdichte

$$\begin{aligned} q_3(x) &= \mathrm{I}_{[-1,1]}(x) \frac{\Gamma(1+\frac{3}{2})}{\Gamma(2)\sqrt{\pi}} (1-x^2) \\ &= \mathrm{I}_{[-1,1]}(x) \frac{3}{4} (1-x^2) \end{aligned}$$

und hat damit die Verteilungsfunktion

$$F_3(x) = \frac{3}{4} \int\limits_{-1}^{x} (1-y^2) dy = \frac{1}{4}(2+3x-x^3) \ \text{für } -1 \le x \le 1.$$

Nutzt man zum Beispiel (1.8), so können wir die Hoeffding-Koeffizienten $\beta_n^3$ von $\eta$ ausrechnen und erhalten

$$\begin{aligned} \beta_n^3 &= \int\limits_{0}^{\infty} 1 - (F_3(x))^n dx - \int\limits_{-\infty}^{0} (F_3(x))^n dx \\ &= 1 - 4^{-n} \int\limits_{-1}^{1} (2+3x-x^3)^n dx \ . \end{aligned}$$

Diese Hoeffding-Koeffizienten läßt man sich jetzt am Besten numerisch berechnen. Für allgemeine Kugeln mit Radius $r > 0$ und Mittelpunkt $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^d$ gilt

**Satz 2.2** *Es sei* $\boldsymbol{\xi}$ *gleichverteilt in einer Kugel im* $\mathbb{R}^d$ *mit Radius* $r > 0$ *und Mittelpunkt* $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^d$. *Dann sind die Vitale-Körper von* $\boldsymbol{\xi}$ *gegeben durch*

$$\mathbb{K}_n = r\widetilde{\mathbb{K}}_n + \boldsymbol{b} \ ,$$

*wobei* $\widetilde{\mathbb{K}}_n$ *die Vitale-Körper von* $\boldsymbol{\gamma}$ *sind, welches gleichverteilt in* $B_1(0)$ *ist.*

**Beweis:** Eine Kugel $K$ mit Radius $r$ und Mittelpunkt $\boldsymbol{b}$ entsteht aus der Einheitskugel $B_1(0)$ in dem man folgende Rechnung durchführt

$$K = rB_1(0) + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{A}B_1(0) + \boldsymbol{b} \ .$$

Dabei ist $\boldsymbol{A} = r\boldsymbol{E}_d$ und $\boldsymbol{E}_d$ die d-dimensionale Einheitsmatrix. Wenden wir Folgerung 1 an, führt uns das zum Satz.

□

### 2.2.2 Gleichverteilung in Ellipsoiden

Jedes Ellipsoid $E$ im $\mathbb{R}^d$ kann durch eine Anwendung einer linearen Abbildung $A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ auf die Einheitskugel $B_1(0) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : \|\boldsymbol{x}\| \leq 1\}$ und eine anschließende Verschiebung des Mittelpunktes um den Vektor $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^d$ beschrieben werden. Es sei $\boldsymbol{A}$ die zur linearen Abbildung $A$ gehörende $d \times d$ Matrix. Nun erlaubt uns die Folgerung auf Seite 50, die Vitale-Körper von Gleichverteilungen auf allgemeinen Ellipsoiden im $\mathbb{R}^d$ anzugeben.

**Satz 2.3** *Es sei* $\boldsymbol{\xi}$ *gleichverteilt in einem Ellipsoid* $E$ *mit Mittelpunkt* $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^d$. *Wenn das Ellipsoid durch die Transformation der Einheitskugel* $B_1(0)$, $E = \boldsymbol{A}B_1(0) + \boldsymbol{b}$ *entsteht, wobei* $\boldsymbol{A}$ *die Abbildungsmatrix einer linearen Abbildung* $A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *und* $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^d$ *ein Verschiebungsvektor ist, dann sind die Vitale-Körper von* $\boldsymbol{\xi}$ *gegeben durch*

$$\mathbb{K}_n = \boldsymbol{A}\widetilde{\mathbb{K}}_n + \boldsymbol{b} \ .$$

*Dabei sind die* $\widetilde{\mathbb{K}}_n$ *die Vitale-Körper von* $\boldsymbol{\gamma}$, *welches gleichverteilt in* $B_1(0)$ *ist.*

### 2.2.3 Mehrdimensionale Normalverteilungen

#### Die mehrdimensionale Standardnormalverteilung

Nach den Beispielen mit Gleichverteilungen wollen wir uns auch der mehrdimensionalen Standardnormalverteilung zuwenden.

**Definition 2.6** *Ein Zufallsvektor* $\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_d \end{pmatrix}$ *heißt d-dimensional standardnormalverteilt, wenn* $\xi_1, \ldots \xi_d$ *unabhängig identisch standardnormalverteilt sind.*

Die mehrdimensionale Standardnormalverteilung ist eine drehungsinvariante Verteilung, also gilt

$$\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{u} \rangle \sim \langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{v} \rangle \quad \text{für alle } \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathcal{S}^{d-1}.$$

Also genügt es, das Verteilungsgesetz von $\eta = \langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{e} \rangle$ zu berechnen, um die Vitale-Körper von $\boldsymbol{\xi}$ zu erhalten. Dabei ist $\boldsymbol{e}$ wieder der erste Einheitsvektor aus der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^d$. Es ist also $\eta = \langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{e} \rangle = \xi_1$. Damit wissen wir, daß die Skalarprodukte selbst alle standardnormalverteilt sind. Für die Standardnormalverteilung kennen wir schon die Hoeffding-Koeffizienten und haben sie damals (siehe Seite 23) mit $\delta_1, \delta_2, \ldots$ bezeichnet. Also gilt für die Vitale-Körper der mehrdimensionalen Standardnormalverteilung mit $\eta_i = \langle \boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{u} \rangle$ und $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \ldots$ unabhängig identisch gemäß $\mathrm{P}_{\boldsymbol{\xi}}$ verteilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{K}_n &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u} \rangle \leq \mathbb{E} \max_{i=1,\ldots,n} \langle \boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{u} \rangle \text{ für alle } \boldsymbol{u} \in \mathcal{S}^{d-1}\} \\
&= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u} \rangle \leq \mathbb{E} \max_{i=1,\ldots,n} \langle \boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{e} \rangle\} \\
&= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u} \rangle \leq \mathbb{E} \max\{\eta_1, \ldots, \eta_n\}\} \ .
\end{aligned}$$

Nun sind die $\eta_i$ Standardnormalverteilt und damit gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{K}_n^d &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u} \rangle \leq \delta_n\} \\
&= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : \|x\| \leq \delta_n\} \\
&= \delta_n B_1(0) \ .
\end{aligned}$$

Folglich sind die Vitale-Körper der mehrdimensionalen Standardnormalverteilung einfach nur Kugeln um den Ursprung mit den Hoeffding-Koeffizienten der eindimensionalen Standardnormalverteilung als Radien.

**Allgemeine mehrdimensionale Normalverteilungen**

Ein allgemeiner mehrdimensional normalverteilter Zufallsvektor $\boldsymbol{\xi}$ wird eindeutig durch seinen Erwartungsvektor $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^d$ und durch die positiv semidefinite Kovarianzmatrix $\boldsymbol{B}$ beschrieben. Für die Kovarianzmatrix $\boldsymbol{B}$ existiert immer die eindeutige Darstellung der Form

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{D}^T \boldsymbol{D} \ .$$

Also gilt mit einem d-dimensional standardnormalverteilten Zufallsvektor $\boldsymbol{\eta}$

$$\boldsymbol{\xi} \sim \boldsymbol{D}\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\mu} \ . \tag{2.8}$$

Demnach bekommen wir aus der Linearität der Vitale-Körper (Folgerung 1 auf Seite 50) und den Vitale-Körpern der mehrdimensionalen Standardnormalverteilung, insgesamt die Vitale-Körper der allgemeinen mehrdimensionalen Normalverteilung.

**Satz 2.4** *Es sei $\boldsymbol{\xi}$ ein d-dimensional Normalverteilter Zufallsvektor mit Erwartungsvektor $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^d$ und Kovarianzmatrix $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{D}^T \boldsymbol{D}$. Dann besitzt $\boldsymbol{\xi}$ die Vitale-Körper*

$$\mathbb{K}_n = \widetilde{\mathbb{K}}_n \boldsymbol{D} + \boldsymbol{\mu} \ ,$$

*wobei die $\widetilde{\mathbb{K}}_n$ die Vitale-Körper der d-dimensionalen Standardnormalverteilung sind.*

### 2.2.4 Gleichverteilung auf Sphären

Es sei $\boldsymbol{\xi}$ ein auf der Einheitssphäre $\mathcal{S}^{d-1}$ gleichverteilter Zufallsvektor. Wir wollen die Vitale-Körper von $\boldsymbol{\xi}$ bestimmen. Diese Aufgabe können wir auf die Bestimmung der Hoeffding-Koeffizienten von $\eta = \langle\, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{u}\rangle$ zurückführen. Da $\boldsymbol{\xi}$ drehungsinvariant ist, genügt es, die Hoeffding-Koeffizienten von $\eta = \langle\, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{e}\rangle$ zu bestimmen, wobei $\boldsymbol{e}$ der erste Basisvektor der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^d$ ist.

**Vorbereitungen**

Für den standardnormalverteilten Zufallsvektor $\boldsymbol{\zeta} = \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_d \end{pmatrix}$ gilt offensichtlich

$$\boldsymbol{\xi} \sim \frac{1}{\|\boldsymbol{\zeta}\|}\boldsymbol{\zeta} \ .$$

Also gilt für $\eta = \langle\, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{e}\rangle = \xi_1$

$$\eta \sim \tau = \frac{1}{\|\boldsymbol{\zeta}\|}\zeta_1 = \frac{\zeta_1}{\sqrt{\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \cdots + \zeta_d^2}} \ .$$

Nun wollen wir die Verteilungsdichte von $\tau$ bestimmen.

**Lemma 2.4** *Die Zufallsgröße*

$$\tau^2 = \frac{\zeta_1^2}{\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \cdots + \zeta_d^2}$$

*ist betaverteilt erster Art mit den Parametern $r = 1/2$ und $s = \frac{d-1}{2}$. Das heißt $\tau^2 \sim \beta(\frac{1}{2}, \frac{d-1}{2})$ und $\tau^2$ besitzt die Verteilungsdichte*

$$t(x) = \mathrm{I}_{[0,1]}(x)\frac{\Gamma(\frac{d}{2})}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{d-1}{2})}\frac{(1-x)^{\frac{d-3}{2}}}{\sqrt{x}} \ .$$

**Beweis:** Die $\zeta_1, \ldots, \zeta_d$ sind unabhängig standardnormalverteilt und damit folgt, daß die $\zeta_1^2, \ldots, \zeta_d^2$ unabhängig gammaverteilt sind mit Parameter $\lambda = 1/2$ und $\nu = 1/2$. Da die Gammaverteilung faltungsabgeschlossen ist, folgt daß

$$\zeta_2^2 + \cdots + \zeta_d^2 \quad \text{gammaverteilt ist mit Parameter } \lambda = 1/2 \text{ und } \nu = \frac{d-1}{2}.$$

Folglich also ist $\frac{\zeta_1^2}{\zeta_1^2 + (\zeta_2^2 + \cdots \zeta_d^2)}$ betaverteilt mit den Parametern $r = 1/2$ und $s = \frac{d-1}{2}$.

□

**Lemma 2.5** *Die Zufallsgröße $|\tau| = \sqrt{\tau^2}$ hat die Verteilungsdichte*

$$u(x) = \mathrm{I}_{[0,1]}(x)\frac{\Gamma(\frac{d}{2})}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{d-1}{2})}2\sqrt{1-x^2}^{\,d-3} \ .$$

**Beweis:** Für $f : [0,1] \to [0,\infty)$ meßbar rechnen wir

$$\mathbb{E}f(|\tau|) = \mathbb{E}f(\sqrt{\tau^2}) = \int_0^1 f(\sqrt{x}) \frac{\Gamma(\frac{d}{2})}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{d-1}{2})} \frac{(1-x)^{\frac{d-3}{2}}}{\sqrt{x}} dx$$
$$= \frac{\Gamma(\frac{d}{2})}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{d-1}{2})} \int_0^1 f(\sqrt{x}) \frac{(1-x)^{\frac{d-3}{2}}}{\sqrt{x}} dx \ .$$

Die Substitution $x = y^2$ bewirkt:

$$= \frac{\Gamma(\frac{d}{2})}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{d-1}{2})} \int_0^1 f(y) \frac{(1-y^2)^{\frac{d-3}{2}}}{y} 2y dy$$
$$= \frac{\Gamma(\frac{d}{2})}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{d-1}{2})} \int_0^1 f(y) 2\sqrt{(1-y^2)}^{d-3} dy \ .$$

Also ist $u(y) = \mathrm{I}_{[0,1]}(y)\frac{\Gamma(\frac{d}{2})}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{d-1}{2})}2\sqrt{1-y^2}^{d-3}$ eine Verteilungsdichte von $|\tau|$.

□

### Die Verteilungsdichte der Projektion

Da $\tau$ symmetrisch auf $(-1,1)$ verteilt ist, bekommen wir aus der Verteilungsdichte von $|\tau|$, sofort die Verteilungsdichte $q_d : (-1,1) \to [0,\infty)$ von $\tau$ geliefert. Und da $\tau$ und $\eta$ identisch verteilt sind, erhalten wir

**Satz 2.5** *Die Zufallsgröße $\eta$ besitzt die Verteilungsdichte $q_d : (-1,1) \to [0,\infty)$, welche gegeben ist durch*

$$q_d(x) = \mathrm{I}_{(-1,1)}(x)\frac{\Gamma(\frac{d}{2})}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{d-1}{2})}\sqrt{1-x^2}^{d-3} \ .$$

Nun können wir mit Hilfe der Verteilungsdichte von $\eta$ die Hoeffding-Koeffizienten von $\eta$ berechnen und erhalten daraus, wie bei der Gleichverteilung in der Kugel, die Vitale-Körper von $\boldsymbol{\xi}$.
Wie bei den vorigen Abschnitten können wir auch hier wieder die Vitale-Körper von Zufallsvektoren bestimmen, welche auf einer allgemeinen Kugelsphäre gleichverteilt sind. Dabei benutzen wir wieder die Folgerung auf Seite 50.

Nun wollen wir zu einen speziellen Beispiel kommen.

**Vitale-Körper der Einheitssphäre für d = 3**

Aus Satz 4 ergibt sich für die Verteilungsdichte von $\eta = \langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{e} \rangle$

$$q_3(x) = \frac{1}{2} \quad \text{für } -1 < x < 1.$$

Also ist $\eta$ gleichverteilt in $(-1, 1)$ und für die Gleichverteilung sind die Hoeffding-Koeffizienten wohlbekannt. Somit sind die Hoeffding-Koeffizienten von $\eta$ gegeben durch

$$\beta_n = \frac{n-1}{n+1} \ .$$

Die Vitale-Körper von $\boldsymbol{\xi}$ errechnen sich wie folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_n &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : \|x\| \leq \beta_n\} \\ &= \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : \|x\| \leq \frac{n-1}{n+1} \right\} \ . \end{aligned}$$

Da $\frac{n-1}{n+1} \uparrow 1$ ist sieht man hier deutlich, daß die Vitale-Körper die konvexe Hülle des Trägers von Innen heraus approximieren. Dies wird dann im nächsten Kapitel Gegenstand der Untersuchung sein.

## 2.3 Der Träger von Zufallsvektoren und Vitale-Körper

Ähnlich wie die Hoeffding-Koeffizienten für Zufallsgrößen charakterisieren hier die Vitale-Körper die konvexe Hülle des Trägers von Zufallsvektoren $\boldsymbol{\xi}$ mit Erwartungswert auf eine bestimmte Art und Weise.

**Definition 2.7** *Es sei $\boldsymbol{\xi}$ ein d-dimensionaler Zufallsvektor. Dann heißt $N \subseteq \mathbb{R}^{d*}$ Träger von $\boldsymbol{\xi}$, wenn $N$ der Träger des Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathrm{P}_{\boldsymbol{\xi}}$ ist.*

**Bemerkung 4:** Es gelten wieder die Eigenschaften aus der Bemerkung 3 auf Seite 24 und die Definition des Trägers eines Maßes findet man in Definition 1.4.

**Satz 2.6** *Es sei $\boldsymbol{\xi}$ ein Zufallsvektor mit $\mathbb{E}\|\boldsymbol{\xi}\| < \infty$ und mit Träger $N$. Dann gilt für alle $\boldsymbol{u} \in \mathcal{S}^{d-1}$*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E} \max_{i=1,\dots,n} \langle \boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{u} \rangle = \max_{x\in N} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u} \rangle$$

*und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\mathbb{E} \max_{i=1,\dots,n} \langle \boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{u} \rangle \leq \max_{x\in N} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u} \rangle$. Dabei sind die $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \dots$ unabhängig identisch gemäß $\mathrm{P}_{\boldsymbol{\xi}}$ verteilt.*

**Beweis.** Für ein festes $\boldsymbol{u} \in \mathcal{S}^{d-1}$ bilden wir die unabhängigen identisch verteilten Zufallsgrößen $\eta_i = \langle \boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{u} \rangle$ und $\eta = \langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{u} \rangle$. Nun gilt mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung für den Erwartungswert

$$\mathbb{E}|\eta| = \mathbb{E}| \langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{u} \rangle | \leq \mathbb{E}\|\boldsymbol{\xi}\|\|\boldsymbol{u}\| \leq \mathbb{E}\|\boldsymbol{\xi}\| < \infty \ ,$$

da $\|\boldsymbol{u}\| = 1$ ist. Der Träger von $\eta$ ist $N^{\boldsymbol{u}} = \{\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{u}\rangle : \boldsymbol{y} \in N\}$. Demnach sind die Voraussetzungen von Satz 1.9 auf Seite 26 für $\eta$ erfüllt und es gilt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \mathbb{E} \max_{i=1,\dots,n} \langle \boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{u}\rangle &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E} \max\{\eta_1, \dots, \eta_n\} \\ &= \max\{N^{\boldsymbol{u}}\} \\ &= \max\{\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{u}\rangle : \boldsymbol{y} \in N\} \\ &= \max_{\boldsymbol{y}\in N} \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{u}\rangle \ .\end{aligned}$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt außerdem $\max_{i=1,\dots,n} \langle \boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{u}\rangle \leq \max_{x\in N} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}\rangle$, da $N$ der Träger von $\boldsymbol{\xi}$ ist und damit folgt der Satz aus der Monotonie des Erwartungswertes.

□

**Definition 2.8** *Für die abgeschlossenen, konvexen Mengen $K_n, L \subseteq \mathbb{R}^{d*}$ schreiben wir $\lim_{n\to\infty} K_n = L$, wenn für alle $\boldsymbol{u} \in \mathcal{S}^{d-1}$ gilt*

$$\lim_{n\to\infty} h_{K_n}(\boldsymbol{u}) = h_L(\boldsymbol{u}) \ .$$

*Dabei bezeichnet $h_L(\boldsymbol{u}) = \max_{\boldsymbol{x}\in L} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}\rangle$ die Stützfunktion an $L$.*

Schließlich läßt sich formulieren, daß die Vitale Körper die konvexe Hülle vom Träger eines Zufallsvektors mit Erwartungswert von Innen heraus approximieren.

**Satz 2.7** *Es sei $\boldsymbol{\xi}$ ein Zufallsvektor mit $\mathbb{E}\|\boldsymbol{\xi}\| < \infty$ und Träger $N$. Dann gilt*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \mathbb{K}_n &= \operatorname{conv}\{N\} \quad \textit{und} \\ \mathbb{K}_n &\subseteq \operatorname{conv}\{N\} \quad \textit{für alle } n \in N.\end{aligned}$$

*Dabei sind die $\mathbb{K}_n = \mathbb{E}\operatorname{conv}\{\boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_n\}$ die Vitale-Körper von $\boldsymbol{\xi}$.*

**Beweis:** Nach Definition 2.8 ist zu zeigen, daß für alle $\boldsymbol{u} \in \mathcal{S}^{d-1}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} h_{\mathbb{K}_n}(\boldsymbol{u}) = h_{\operatorname{conv}\{N\}}(\boldsymbol{u}) \ .$$

Weil aber gilt, daß $h_{\operatorname{conv}\{N\}}(\boldsymbol{u}) = h_N(\boldsymbol{u})$, können wir den vorhergehenden Satz anwenden und es folgt daraus

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} h_{\mathbb{K}_n}(\boldsymbol{u}) &= \lim_{n\to\infty} \max_{x\in\mathbb{K}_n} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E} \max_{i=1,\dots,n} \langle \boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{u}\rangle \\ &= \max_{x\in N} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}\rangle \\ &= h_{\operatorname{conv}\{N\}}(\boldsymbol{u}) \ .\end{aligned}$$

Weiterhin bekommen wir aus Satz 2.6 noch

$$h_{\mathbb{K}_n}(u) = \mathbb{E} \max_{i=1,\dots,n} \langle \boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{u}\rangle \leq \max_{x\in N} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}\rangle = h_N(\boldsymbol{u}) \ .$$

Nach (2.2) haben wir dann

$$\mathbb{K}_n \subseteq \operatorname{conv}\{N\} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Diese Rechnung kann man für alle $\boldsymbol{u} \in \mathcal{S}^{d-1}$ durchführen und daraus folgt der Satz.

□

**Definition 2.9** *Ein Zufallsvektor* $\boldsymbol{\xi}$ *heißt* Zufallsvektor mit konvexem Träger, *falls für den Träger* $N$ *von* $\boldsymbol{\xi}$ *gilt:*

$$\mathrm{conv}\{N\} = N \ .$$

**Folgerung 2** *Es sei* $\boldsymbol{\xi}$ *ein Zufallsvektor mit konvexem Träger und* $\mathbb{E}\|\boldsymbol{\xi}\| < \infty$. *Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{K}_n = N \quad \textit{ist der Träger von } \boldsymbol{\xi}.$$

*Dabei sind die* $\mathbb{K}_n = \mathbb{E}\mathrm{conv}\{\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_n\}$ *die Vitale-Körper von* $\boldsymbol{\xi}$.

**Beweis:** Diese Folgerung ergibt sich aus Satz 2.7 und der Konvexität von $N$

$$\mathrm{conv}\{N\} = N \ .$$

□

Demzufolge ist der Limes der Vitale Körper zu einem konvexen Zufallsvektor $\boldsymbol{\xi}$ genau der Träger dieses Zufallsvektors.

### 2.3.1 Beschränkte Zufallsvektoren

Mit den soeben gewonnenen Aussagen über den Träger von Zufallsvektoren mit Erwartungswert und dessen Vitale-Körper können wir leicht die Vitale-Körper von bestimmten Verteilungen charakterisieren. Mit dem obigen Satz 2.7 erhalten wir für beschränkte Zufallsvektoren

**Satz 2.8** *Ein Zufallsvektor* $\boldsymbol{\xi}$ *mit* $\mathbb{E}\|\boldsymbol{\xi}\| < \infty$ *ist genau dann beschränkt, wenn ein* $c \in \mathbb{R}$ *existiert, so daß für die Vitale-Körper* $\mathbb{K}_n$ *von* $\boldsymbol{\xi}$ *gilt*

$$\mathbb{K}_n \subseteq B_c(0) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : \|\boldsymbol{x}\| \le c\} \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

**Beispiel**

Wenn $\boldsymbol{\xi}$ gleichverteilt ist in der Kugelsphäre $S = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\boldsymbol{x}\| = r\}$, dann kennen wir schon die Vitale-Körper von $\boldsymbol{\xi}$ und diese sind

$$\mathbb{K}_n = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : \|x\| \le r\frac{n-1}{n+1}\right\} \ .$$

Man sieht sofort, daß $\mathbb{K}_n \subseteq B_r(0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist. Also ist $\boldsymbol{\xi}$ beschränkt, und mehr noch erkennen wir, da $\lim_{n\to\infty} r\frac{n-1}{n+1} = r$ ist, daß die konvexe Hülle vom Träger gleich der Kugel um den Ursprung mit Radius $r$ ist.

## 2.4 Drehungsinvariante Zufallsvektoren

### 2.4.1 Charakterisierung durch Vitale-Körper

Ein Zufallsvektor $\boldsymbol{\xi}$ heißt drehungsinvariant, wenn für alle Drehmatrizen $\boldsymbol{D}$ gilt

$$\boldsymbol{\xi} \sim \boldsymbol{D}\boldsymbol{\xi} \; .$$

Folglich können wir für die Vitale-Körper folgenden Charakterisierungssatz von drehungsinvarianten Verteilungen angeben.

**Satz 2.9** *Ein Zufallsvektor $\boldsymbol{\xi}$ mit $\mathbb{E}\|\boldsymbol{\xi}\| < \infty$ ist genau dann drehungsinvariant, wenn seine zugehörigen Vitale-Körper Kugeln um den Ursprung sind.*

**Beweis:** Es sei $\boldsymbol{\xi}$ ein Zufallsvektor mit Erwartungswert. Wir bezeichnen die Vitale-Körper von $\boldsymbol{\xi}$ als $\mathbb{K}_n$ und die von $\boldsymbol{D}\boldsymbol{\xi}$ als $\mathbb{K}'_n$ für eine Drehmatrix $\boldsymbol{D}$. Nach Lemma 2.3 ist $\mathbb{K}'_n = \boldsymbol{D}\mathbb{K}_n$. Nun folgt aus der Eindeutigkeit der Vitale-Körper (siehe [8])

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\xi} \text{ ist drehungsinvariant} &\Leftrightarrow \boldsymbol{\xi} \sim \boldsymbol{D}\boldsymbol{\xi} \text{ für alle Drehmatrizen } \boldsymbol{D}\\ &\Leftrightarrow \mathbb{K}_n = \mathbb{K}'_n = D\mathbb{K}_n \text{ für alle Drehmatrizen } \boldsymbol{D} \text{ und alle } n \in \mathbb{N}\\ &\Leftrightarrow \mathbb{K}_n \text{ ist eine Kugel um den Ursprung, für alle } n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

□

### 2.4.2 Beispiele

Drehungsinvariante Verteilungen sind zum Beispiel die Gleichverteilungen auf Kugeln um den Ursprung, oder Gleichverteilungen auf den Kugelsphären. Zu diesen haben wir weiter vorn schon die Vitale-Körper angegeben und festgestellt, daß die Vitale-Körper Kugeln um den Ursprung sind. Eine weitere wichtige drehungsinvariante Verteilung ist die der mehrdimensionalen Standardnormalverteilung.
Bei allen haben wir schon ausgenutzt, daß sie drehungsinvariant sind. Somit genügte es das Skalarprodukt mit $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e} \in \mathcal{S}^{d-1}$ zu berechnen, statt für alle $\boldsymbol{u} \in \mathcal{S}^{d-1}$ die Rechnung durchzuführen.

### 2.4.3 Lineare Bilder drehungsinvarianter Verteilungen

Besitzt ein Zufallsvektor $\boldsymbol{\eta}$ mit $\mathbb{E}\|\boldsymbol{\eta}\| < \infty$ die Darstellung $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}$, wobei $\boldsymbol{\xi}$ ein drehungsinvarianter Zufallsvektor und $\boldsymbol{A}$ eine $d \times d$ Matrix ist, dann sind die Vitale-Körper von $\boldsymbol{\eta}$ Ellipsoide um den Ursprung. Dies folgt aus Lemma 2.3, da die Vitale-Körper von $\boldsymbol{\xi}$ nach dem obigen Satz Kugeln um den Ursprung sind. Das heißt, die Vitale-Körper von $\boldsymbol{\eta}$ sind Kugeln um den Ursprung, welche einer linearen Abbildung unterworfen werden. Also ergeben sich Ellipsoide um den Ursprung.

Weil die Gleichverteilungen auf Ellipsoiden und die Normalverteilung mit Erwartungsvektor $\boldsymbol{\mu} = 0$ lineare Bilder von drehungsinvarianten Verteilungen sind, wissen wir, daß die zugehörigen Vitale-Körper Ellipsoide sind.
Bei einer allgemeinen mehrdimensionalen Normalverteilung mit Erwartungsvektor $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^d$ werden die Ellipsoide einfach um den Vektor $\boldsymbol{\mu}$ verschoben.

# Literaturverzeichnis

[1] Arnold, Barry A.; Balakrishnan, N; Nagaraja, H. N.: *A First Course in Order Statistics.*
New York: Wiley (1992)

[2] Artstein, Zvi: *On the Calculus of Closed Set-Valued Functions.*
Iniana Univ. Math. J. **24** (1974) 433-441

[3] Barndorff-Nielsen, Ole; Kendall, Wilfrid;van Lieshout, Marie-Collete N.M.: *Stochastic Geometry: Likelihood and Computation.*
New York: Chapman & Hall/CRC (1999)

[4] David, Herbert A.: *Order Statistics (2nd ed.).*
New York: Wiley (1981)

[5] Elstrodt, Jürgen: *Maß- und Integrationstheorie (3. erweiterte Auflage).*
Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag (2002)

[6] Gnedenko, Boris W.:*Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitstheorie(10. Auflage).*
Frankfurt am Main: Verlag Harri Deutsch (1997)

[7] Hoeffding, Wassily: *On the Distribution of the Expected Values of the Order Statistics.*
Annals Math. Statist. **24** (1953) 93-100

[8] Vitale, Richard A.: *Expected Convex Hulls, Order Statistics, and Banach Space Probabilitys.*
Acta Applicandae Mathematicae **9** (1987) 97-102

Erklärung

Hiermit erkläre ich, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Jena, den 4. April 2008