Prof. Dr. Hans-Jürgen Schmeisser / Henning Kempka

Übungen zur Vorlesung Höhere Analysis (Funktionalanalysis I)

Blatt 1 — Abgabe der mit * gekennzeichneten Aufgaben zum 27.10.2006

Aufgabe 1: Wiederholung
Wiederholen Sie die Begriffe:

(a) Metrik, metrischer Raum, Dreiecks-Ungleichung, Vektorraum, Norm
(b) offene, geschlossene, kompakte, beschränkte Menge, Abschluß und Rand einer Menge, Einheitskugel, Vollständigkeit, Konvergenz, Dimension, Skalarprodukt, Banachraum, Hilbertraum
(c) $\ell_2^n, \ell_2, C([a,b]), C^k([a,b]), \ell_p^n, \ell_p, c_0$.

Aufgabe 2: Young'sche Ungleichung
Beweisen Sie für $1 < p, p' < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, a, b \geq 0$, dass

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'} \ .$$

Aufgabe 3*: Vollständigkeit
Ein normierter Raum $(X, ||\cdot||)$ ist genau dann vollständig, wenn jede absolut konvergente Reihe in X - $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n|| < \infty, x_n \in X$ - ein Grenzelement $x \in X$ mit $x = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} x_n$ besitzt.

Aufgabe 4: Unvollständigkeit
Zeigen Sie, dass die folgenden normierten Räume nicht vollständig sind:

(a)
$$c_{00} = \Big\{ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \mid \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall l \geq k : \quad x_l = 0 \Big\} \subset c_0$$

mit der sup-Norm

$$\| \{x_n\}_{n=1}^{\infty} | \, c_{00} \| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \ .$$

(b) Die Menge $\ell_p, (1 \leq p < \infty)$, mit der sup-Norm.
(c) Die Menge $C^1([a,b])$ mit der sup-Norm $\|x| \, L_\infty\| = \sup_{t\in[a,b]} |x(t)|$.
(d)* Die Menge ℓ_1 mit der Norm $\|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\sum_{k=1}^{n} x_k|$. Überprüfe zuerst, daß dies tatsächlich eine Norm ist.

Aufgabe 5*: Parallelogrammgleichung
Sei $(X, ||\cdot|X||)$ ein Banachraum. Dann existiert auf X ein Skalarprodukt, das $||\cdot|X||$ generiert, genau dann wenn für alle $x, y \in X$

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2 \ .$$

Zeige mit Hilfe der Parallelogrammgleichung, daß ℓ_p $(1 \leq p \leq \infty)$ genau dann ein Skalarprodukt besitzt, wenn $p = 2$ gilt.