ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG HÖHERE ANALYSIS (FUNKTIONALANALYSIS I)

BLATT 10

ABGABE DER MIT * GEKENNZEICHNETEN AUFGABEN ZUM 19.1.2007

AUFGABE 1: Ptolemäus'sche Ungleichung

Zeigen Sie, dass für Punkte x, y, z in einem Hilbertraum

$$\|x\| \|y - z\| \leq \|y\| \|z - x\| + \|z\| \|x - y\|$$

gilt.

AUFGABE 2: Apollonius'sche Gleichung

Zeigen Sie, dass für Punkte x, y, z in einem Hilbertraum

$$\|z - x\|^2 + \|y - z\|^2 = \frac{1}{2}\|x - y\|^2 + 2\|z - \frac{1}{2}(x + y)\|^2$$

gilt. Ist das eine Charakterisierung von Hilberträumen (wie die Parallelogrammgleichung)?

AUFGABE 3*:

Sei H ein Prä-Hilbertraum, $x, y \in H$ und $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Folge in H . Zeigen Sie, dass

- (a) $x_n \rightarrow x$ genau dann, wenn $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ und $\langle x_n, x \rangle \rightarrow \langle x, x \rangle$,
- (b) $x \perp y$ genau dann, wenn $\|x + \alpha y\| = \|x - \alpha y\|$ für alle $\alpha \in \mathbb{K}$.
- (c) $x \perp y$ genau dann, wenn $\|x + \alpha y\| \geq \|x\|$ für alle $\alpha \in \mathbb{K}$.

AUFGABE 4:

Sei H ein reeller Prä-Hilbertraum und $x, y \in H$. Zeigen Sie, dass

- (a) $\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2$ genau dann, wenn $x \perp y$,
- (b) $\|x\| = \|y\| \implies (x + y) \perp (x - y)$.

Gelten diese Aussagen auch für komplexe Prä-Hilberträume?

AUFGABE 5*:

Zeigen Sie, dass $C([a, b])$ und $L_p(\Omega)$, $p \neq 2$ ($0 < |\Omega|$) keine Prä-Hilberträume sind. Das heißt, auf diesen Räumen gibt es kein Skalarprodukt, welches ihre Norm generiert.

AUFGABE 6:

Seien $A \subset B$ Unterräume und U und V abgeschlossene Unterräume des Hilbertraumes H . Seien P_U und P_V entsprechende Orthogonalprojektionen. Zeigen Sie, dass

- (a) $A \subset A^{\perp\perp}$,
- (b) $B^\perp \subset A^\perp$,
- (c) $A^{\perp\perp\perp} = A^\perp$,
- (d) $U \subset V$ genau dann, wenn $P_U = P_V P_U = P_U P_V$.