Prof. Dr. Hans-Jürgen Schmeisser / Henning Kempka

Übungen zur Vorlesung Höhere Analysis (Funktionalanalysis I)

Blatt 10 — Abgabe der mit * gekennzeichneten Aufgaben zum 19.1.2007

Aufgabe 1: **Ptolemäus'sche Ungleichung**

Zeigen Sie, dass für Punkte x, y, z in einem Hilbertraum

$$||x||\,||y-z|| \le ||y||\,||z-x|| + ||z||\,||x-y||$$

gilt.

Aufgabe 2: **Apollonius'sche Gleichung**

Zeigen Sie, dass für Punkte x, y, z in einem Hilbertraum

$$||z-x||^2 + ||y-z||^2 = \frac{1}{2}||x-y||^2 + 2||z - \frac{1}{2}(x+y)||^2$$

gilt. Ist das eine Charakterisierung von Hilberträumen (wie die Parallelogrammgleichung)?

Aufgabe 3*:

Sei H ein Prä-Hilbertraum, $x, y \in H$ und $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Folge in H. Zeigen Sie, dass

(a) $x_n \to x$ genau dann, wenn $||x_n|| \to ||x||$ und $< x_n, x > \to < x, x >$,
(b) $x \perp y$ genau dann, wenn $||x + \alpha y|| = ||x - \alpha y||$ für alle $\alpha \in \mathbb{K}$.
(c) $x \perp y$ genau dann, wenn $||x + \alpha y|| \ge ||x||$ für alle $\alpha \in \mathbb{K}$.

Aufgabe 4:

Sei H ein reeller Prä-Hilbertraum und $x, y \in H$. Zeigen Sie, dass

(a) $||x||^2 + ||y||^2 = ||x+y||^2$ genau dann, wenn $x \perp y$,
(b) $||x|| = ||y|| \implies (x+y) \perp (x-y)$.

Gelten diese Aussagen auch für komplexe Prä-Hilberträume?

Aufgabe 5*:

Zeigen Sie, dass $C([a,b])$ und $L_p(\Omega)$, $p \neq 2$ $(0 < |\Omega|)$ keine Prä-Hilberträume sind. Das heißt, auf diesen Räumen gibt es kein Skalarprodukt, welches ihre Norm generiert.

Aufgabe 6:

Seien $A \subset B$ Unterräume und U und V abgeschlossene Unterräume des Hilbertraumes H. Seien P_U und P_V entsprechende Orthogonalprojektionen. Zeigen Sie, dass

(a) $A \subset A^{\perp\perp}$,
(b) $B^{\perp} \subset A^{\perp}$,
(c) $A^{\perp\perp\perp} = A^{\perp}$,
(d) $U \subset V$ genau dann, wenn $P_U = P_V P_U = P_U P_V$.