ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG HÖHERE ANALYSIS (FUNKTIONALANALYSIS I)

BLATT 11

ABGABE DER MIT * GEKENNZEICHNETEN AUFGABEN ZUM 26.01.2007

AUFGABE 1*: Legendrepolynome

Die Legendrepolynome P_n sind auf dem Intervall $[-1, 1]$ definiert durch

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} [(t^2 - 1)^n], \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

In dieser Aufgabe sollen Sie verifizieren, dass die (in $L_2[-1, 1]$ normierten) Legendrepolynome durch Gram-Schmidt-Verfahren der Funktionen $x_n(t) = t^n$ entstehen. Zeigen Sie dazu:

- (i) $P_n(1) = 1$.
- (ii) $P'_{n+1}(t) = \frac{1}{2^{n+1} n!} \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} [t(t^2 - 1)^n]$.
- (iii) $P'_{n+1}(t) = (2n + 1)P_n(t) + P'_{n-1}(t)$.
- (iv) $P'_{n+1}(t) = tP'_n(t) + (n + 1)P_n(t)$.
- (v) $nP_n(t) = tP'_n(t) - P'_{n-1}(t)$.
- (vi) $(1 - t^2)P'_n(t) = nP_{n-1}(t) - ntP_n(t)$.
- (vii) Differenzieren Sie (vi) und benutzen Sie (v) um $Q_n(t) := \frac{d}{dt} [(1 - t^2)P'_n(t)] + n(n + 1)P_n(t) = 0$ zu zeigen.
- (viii) Betrachten Sie $Q_n P_m - Q_m P_n$ für $n \neq m$ und integrieren Sie partiell, um zu zeigen, dass P_n und P_m in $L_2[-1, 1]$ orthogonal sind. Folgern Sie, dass die Legendrepolynome nach Normierung in $L_2[-1, 1]$ tatsächlich eine Orthonormalbasis bilden, die aus den Funktionen $x_n(t) = t^n$ durch das Gram-Schmidt-Verfahren entstehen.

AUFGABE 2: Hermitepolynome

Zeigen Sie:

- (a) Funktionen $f_n(x) = x^n e^{-x^2/2}$, $n \in \mathbb{N}_0$, sind linear unabhängig in $L_2(\mathbb{R})$.
- (b) Durch Gram-Schmidt-Verfahren erhält man also ein Orthonormalsystem in $L_2(\mathbb{R})$, das aus Funktionen der Gestalt $H_n(x) = P_n(x)e^{-x^2/2}$ besteht, wo P_n ein Polynom vom Grad n ist. Die P_n heißen *Hermitepolynome*, die H_n *Hermitefunktionen*.
- (c) Berechne H_0, H_1, H_2 .

Bemerkung: Man kann zeigen, dass die lineare Hülle von $\{f_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ dicht in $L_2(\mathbb{R})$ liegt. Die Hermitefunktionen bilden also sogar eine Orthonormalbasis.

AUFGABE 3: Rademacherfunktionen

- (a) Die *Rademacherfunktionen* $r_n(t) = \text{sign} \sin(2^n \pi t)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, bilden ein Orthonormalsystem, aber keine Orthonormalbasis von $L_2([0, 1])$.
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} r_k(t) = 0$ für fast alle $t \in [0, 1]$.

AUFGABE 4: Tensorprodukte

- (a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n, \Omega' \subset \mathbb{R}^m$. Sei $\{e_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ Orthonormalbasis in $L_2(\Omega)$ und $\{f_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ Orthonormalbasis in $L_2(\Omega')$. Zeigen Sie, dass $\{e_n \otimes f_m : n, m \in \mathbb{N}_0\}$ eine Orthonormalbasis in $L_2(\Omega \times \Omega')$ bilden, wobei $(e_n \otimes f_m)(x, y) = e_n(x)f_m(y)$.
- (b) Bilden Sie die trigonometrische Basis in $L_2(\mathbb{T}^2)$!