Prof. Dr. Hans-Jürgen Schmeisser / Henning Kempka

Übungen zur Vorlesung Höhere Analysis (Funktionalanalysis I)

Blatt 11 — Abgabe der mit * gekennzeichneten Aufgaben zum 26.01.2007

Aufgabe 1*: Legendrepolynome

Die *Legendrepolynome* P_n sind auf dem Interval $[-1,1]$ definiert durch

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}[(t^2-1)^n], \quad n = 0,1,2,\ldots$$

In dieser Aufgabe sollen Sie verifizieren, dass die (in $L_2[-1,1]$ normierten) Legendrepolynome durch Gram-Schmidt-Verfahren der Funktionen $x_n(t) = t^n$ entstehen. Zeigen Sie dazu:

(i) $P_n(1) = 1$.
(ii) $P'_{n+1}(t) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}[t(t^2-1)^n]$.
(iii) $P'_{n+1}(t) = (2n+1)P_n(t) + P'_{n-1}(t)$.
(iv) $P'_{n+1}(t) = tP'_n(t) + (n+1)P_n(t)$.
(v) $nP_n(t) = tP'_n(t) - P'_{n-1}(t)$.
(vi) $(1-t^2)P'_n(t) = nP_{n-1}(t) - ntP_n(t)$.
(vii) Differenzieren Sie (vi) und benutzen Sie (v) um $Q_n(t) := \frac{d}{dt}[(1-t^2)P'_n(t)] + n(n+1)P_n(t) = 0$ zu zeigen.
(viii) Betrachten Sie $Q_nP_m - Q_mP_n$ für $n \neq m$ und integrieren Sie partiell, um zu zeigen, dass P_n und P_m in $L_2[-1,1]$ orthogonal sind. Folgern Sie, dass die Legendrepolynome nach Normierung in $L_2[-1,1]$ tatsächlich eine Orthonormalbasis bilden, die aus den Funktionen $x_n(t) = t^n$ durch das Gram-Schmidt-Verfahren entstehen.

Aufgabe 2: Hermitepolynome

Zeigen Sie:

(a) Funktionen $f_n(x) = x^n e^{-x^2/2}, n \in \mathbb{N}_0$, sind linear unabhängig in $L_2(\mathbb{R})$.
(b) Durch Gram-Schimdt-Verfahren erhält man also ein Orthonormalsystem in $L_2(\mathbb{R})$, das aus Funktionen der Gestalt $H_n(x) = P_n(x)e^{-x^2/2}$ besteht, wo P_n ein Polynom vom Grad n ist. Die P_n heißen *Hermitepolynome*, die H_n *Hermitefunktionen.*
(c) Berechne H_0, H_1, H_2.

Bemerkung: Man kann zeigen, dass die lineare Hülle von $\{f_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ dicht in $L_2(\mathbb{R})$ liegt. Die Hermitefunktionen bilden also sogar eine Orthonormalbasis.

Aufgabe 3: Rademacherfunktionen

(a) Die *Rademacherfunktionen* $r_n(t) = \operatorname{sign}\sin(2^n\pi t), n = 0,1,2,\ldots,$ bilden ein Orthonormalsystem, aber keine Orthonormalbasis von $L_2([0,1])$.
(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} r_k(t) = 0$ für fast alle $t \in [0,1]$.

Aufgabe 4: Tensorprodukte

(a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n, \Omega' \subset \mathbb{R}^m$. Sei $\{e_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ Orthonormalbasis in $L_2(\Omega)$ und $\{f_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ Orthonormalbasis in $L_2(\Omega')$. Zeigen Sie, dass $\{e_n \otimes f_m : n,m \in \mathbb{N}_0\}$ eine Orthonormalbasis in $L_2(\Omega\times\Omega')$ bilden, wobei $(e_n \otimes f_m)(x,y) = e_n(x)f_m(y)$.
(b) Bilden Sie die trigonometrische Basis in $L_2(\mathbb{T}^2)$!