Prof. Dr. Hans-Jürgen Schmeisser / Henning Kempka

Übungen zur Vorlesung Höhere Analysis (Funktionalanalysis I)

Blatt 12 — Abgabe der mit * gekennzeichneten Aufgaben zum 02.02.2007

Aufgabe 1: Cayley-Transformation

Sei H ein komplexer Hilbertraum.

(a) Sei $U \in \mathcal{L}(H)$ unitär mit $1 \notin S_U$. Dann ist
$$T := \mathcal{C}(U) = -i(I+U)(I-U)^{-1}$$
selbstadjungiert.

(b) Sei $T \in \mathcal{L}(H)$ selbstadjungiert. Dann ist
$$U := (T+iI)(T-iI)^{-1}$$
unitär, $1 \notin S_U$ und $T = \mathcal{C}(U)$. Hinweis: Benutzen Sie, dass $S_T \subset \mathbb{R}$.

Aufgabe 2: Hardyoperatoren

Zeigen Sie, dass der Operator
$$(Mf)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$$
in $\mathcal{L}(L_2(0,\infty))$ liegt. Finden Sie M^*.

Aufgabe 3*:

Sei H ein komplexer Hilbertraum und $T \in \mathcal{L}(H)$.

(a) Es gibt selbstadjungierte Operatoren $A, B \in \mathcal{L}(H)$, so dass $T = A + iB$. A und B sind eindeutig bestimmt.

(b) T ist normal, genau dann wenn $AB{=}BA$.

(c) T ist kompakt, genau dann wenn A und B kompakt sind.

Aufgabe 4:

Ist H ein Hilbertraum und $T \in \mathcal{L}(H)$ normal, so ist $r(T) = ||T||$.

Aufgabe 5*:

Sei $h \in L_1(\mathbb{R})$ und $Tf = f * h$. Zeigen Sie, dass der Operator $T : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ normal ist und finden Sie T^*.

Aufgabe 6: Multiplikationsoperatoren

Es sei $f \in L_2([0,1])$ und A definiert durch
$$A : L_2([0,1]) \to L_2([0,1]) : \quad Af(x) = xf(x)\ .$$
Man zeige

(a) $A \in \mathcal{L}(L_2([0,1]))$, A ist selbstadjungiert .

(b) A hat keine Eigenwerte und $S_A = [0,1]$.

Aufgabe 7:

Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π periodische und gerade Funktion mit $h \in L_{2,\pi}(\mathbb{R})$. Betrachte den Operator
$$T_h : L_{2,\pi}(\mathbb{R}) \to L_{2,\pi}(\mathbb{R}) : \quad T_h f(s) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)h(s-t)\frac{dt}{2\pi}\ .$$

(a) Zeige: $T_h \in \mathcal{L}(L_{2,\pi}(\mathbb{R}))$, T_h ist selbstadjungiert und kompakt.

(b) Man bestimme durch Fourierreihenentwicklung von h die Eigenwerte und Eigenfunktionen von T_h.

(c) Bestimme die Spektralzerlegung von T_h.