Prof. Dr. Hans-Jürgen Schmeisser / Henning Kempka

Übungen zur Vorlesung Höhere Analysis (Funktionalanalysis I)

Blatt 2 — Abgabe der mit * gekennzeichneten Aufgaben zum 03.11.2006

Aufgabe 1: **ℓ_p-Räume für $p < 1$**

Sei $0 < p \le 1$, $a, b > 0$ und $x^i = \{x_n^i\}_{n=1}^\infty$, $i = 1, 2$. Zeigen Sie, dass $a + b \le (a^p + b^p)^{\frac{1}{p}} \le 2^{\frac{1}{p}-1}(a+b)$ und

$$\left(\sum_{n=1}^\infty |x_n^1 + x_n^2|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le 2^{\frac{1}{p}-1}\left\{\left(\sum_{n=1}^\infty |x_n^1|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^\infty |x_n^2|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\}$$

gilt. Beweisen Sie, dass die Konstante $2^{\frac{1}{p}-1}$ optimal ist.

Aufgabe 2: **Separabilität**

(a) Zeigen Sie, dass der Raum ℓ_∞ nicht separabel ist.
(b) Zeigen Sie, dass ein normierter Raum X separabel ist genau dann, wenn seine Einheitskugel $B_X = \{x \in X : \|x|X\| \le 1\}$ separabel ist.

Aufgabe 3: **Kompaktheit - Hilbertscher Quader**

Sind die Mengen

$$M_1 = \left\{\{x_n\}_{n=1}^\infty : \sup_{n\in\mathbb{N}} 2^n|x_n| \le 1\right\} \subset \ell_2, \quad M_2 = \left\{\{x_n\}_{n=1}^\infty : \sum_{n=1}^\infty n|x_n| \le 1\right\} \subset \ell_2$$

kompakt?
Hinweis: Konstruieren Sie für jedes $K \in \mathbb{N}$ ein 2^{-K}-Netz!

Aufgabe 4: **Präkompakte Mengen in c_0**

Die Menge $A \subset c_0$ is genau dann präkompakt wenn es ein $\{x_n\} \in c_0$ gibt, so dass $|a_n| \le x_n$ für alle $\{a_n\} \in A$ und $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 5: **Projektionen**

Sei $M = \left\{\{z_n\}_{n=1}^\infty \in c_0 : \sum_{n=1}^\infty \frac{z_n}{2^n} = 0\right\} \subset c_0$ und $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty = \{\frac{1}{2^n}\}_{n=1}^\infty \in c_0$. Zeigen Sie:

(a) M ist ein abgeschlossener Unterraum c_0.
(b) $\operatorname{dist}(x, M) = \frac{1}{3}$.
(c) $\|x - z|c_0\| > \frac{1}{3}$ für alle $z \in M$.

Aufgabe 6*:

Sei $1 \le p \le \infty$ und

$$M_p = \left\{\{x_n\}_{n=1}^\infty \in \ell_p : \sum_{n=1}^\infty x_n = 0\right\} .$$

Zeigen Sie:

(a) M_1 ist abgeschlossen in ℓ_1.
(b) M_2 ist *nicht* abgeschlossen in ℓ_2; M_2 liegt sogar dicht in ℓ_2.
(c) M_∞ ist auch nicht abgeschlossen in ℓ_∞.