Prof. Dr. Hans-Jürgen Schmeisser / Henning Kempka

Übungen zur Vorlesung Höhere Analysis (Funktionalanalysis I)

Blatt 3 — Abgabe der mit * gekennzeichneten Aufgaben zum 10.11.2006

Aufgabe 1*: **Lipschitzfunktionen**

Betrachten Sie den Raum $Lip[0,1]$ aller Lipschitz-stetigen Funktionen auf dem Interval $[0,1]$ mit der Norm

$$\|x|\,Lip\| = |x(0)| + \sup_{s\neq t}\left|\frac{x(s)-x(t)}{s-t}\right|.$$

Zeigen Sie:

(a) $Lip[0,1]$ ist ein Vektorraum.
(b) $\|\cdot|\,Lip\|$ ist eine Norm auf $Lip[0,1]$.
(c) $Lip[0,1]$ ist ein Banachraum.
(d) Warum setzt man nicht einfach $\|x|\,Lip\| = \sup_{s\neq t}\left|\frac{x(s)-x(t)}{s-t}\right|$?

Aufgabe 2: **Projektionen II.**

Sei X ein Banachraum und $M \subset X$. Sei

$$\mathcal{P}_M(x^0) = \{y \in M : ||x^0 - y|| = \operatorname{dist}(x^0, M)\}\ , \qquad x^0 \in X.$$

Zeigen Sie:

(a) Auch wenn M eine abgeschlossene Menge ist, kann es passieren, dass $\mathcal{P}_M(x^0) = \emptyset$ (Hinweis: Aufgabe 5 von Blatt 2).
(b) Wenn $\dim X < \infty$ und M abgeschlossen ist, dann ist $\mathcal{P}_M(x^0) \neq \emptyset$. Wenn M noch konvex ist, dann ist $\mathcal{P}_M(x^0)$ auch konvex.
(c) Sei $X = \ell_2^n$ und M eine konvexe, abgeschlossene Menge. Dann enthält $\mathcal{P}_M(x^0)$ gerade ein Element. Die Abbildung

$$\mathcal{P}_M : X \to X; \qquad \mathcal{P}_M : x^0 \to \mathcal{P}_M(x^0)$$

ist stetig.

Aufgabe 3:

Zeigen Sie:

(a) In jedem normierten Raum E gilt $\overline{K_r(0)} = \{x \in E : ||x|| \le r\}$ und $\partial K_r(0) = \{x \in E : ||x|| = r\}$.
(b) Ein normierter Raum E ist genau dann endlichdimensional, wenn $\partial K_r(0)$ kompakt ist für ein $r > 0$.

Aufgabe 4:

Sei K eine kompakte Teilmenge des Banachraumes X und C eine abgeschlossene Teilmenge von X. Zeigen Sie, dass $C + K = \{c + k : c \in C, k \in K\}$ abgeschlossen ist. Zeigen Sie auch, dass die Summe zweier abgeschlossener Mengen in allgemein nicht abgeschlossen ist.