Prof. Dr. Hans-Jürgen Schmeisser / Henning Kempka

Übungen zur Vorlesung Höhere Analysis (Funktionalanalysis I)

Blatt 4 — Abgabe der mit * gekennzeichneten Aufgaben zum 17.11.2006

Aufgabe 1: $\boldsymbol{\ell_\infty}$

Sei $x \in \ell_q$, $1 < q < \infty$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{p\to\infty} \|x|\,\ell_p\| = \|x|\,\ell_\infty\| \ .$$

Aufgabe 2: **Höldersche Ungleichung**

Sei $0 < p_i \leq \infty$ für $i = 1, \ldots, n$ und $\frac{1}{p} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i}$. Dann gilt für $x^i \in \ell_{p_i}$

$$\left\| \prod_{i=1}^{n} x^i \right| \ell_p \Bigg\| \leq \prod_{i=1}^{n} \|x^i|\,\ell_{p_i}\| \ .$$

Aufgabe 3*: **Hölderräume**

Sei $0 < \alpha < 1$ und

$$C^\alpha = C^\alpha([0,1]) = \{f \in C([0,1]) : \|f|\,C^\alpha\| < \infty\} \ ,$$

$$\|f|\,C^\alpha\| = \sup_{0\leq x\leq 1} |f(x)| + \sup_{\substack{0\leq x,y\leq 1\\ x\neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} \ .$$

Zeigen Sie:

(a) C^α sind Banachräume mit der Norm $\|f|\,C^\alpha\|$.
(b) Sei $0 < \alpha < \beta < 1$. Dann sind beschränkte Mengen in C^β präkompakt in C^α.

Aufgabe 4: **Stetige Fortsetzung**

Es seien X ein metrischer Raum, $A \subset X$ dicht und Y ein vollständiger metrischer Raum. Dann besitzt jede gleichmäßig stetige Funktion $f : A \to Y$ genau eine gleichmäßig stetige Fortsetzung $\tilde{f} : X \to Y$.

Aufgabe 5: **Räume stetiger Funktionen**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Dann definiert man

$$C(\overline{\Omega}) = \{f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig } \}$$

und

$$\overline{C}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \mid f \text{ gleichmäßig stetig und beschränkt}\}.$$

Benutzen Sie die Aufgabe 4 und konstruieren Sie eine isometrische Abbildung $I : C(\overline{\Omega}) \to \overline{C}(\Omega)$.

Aufgabe 6: **Satz von Dini**

Sei X ein kompakter metrischer Raum. Weiter seien $f_k \in C(X,\mathbb{R})$ und es gelte $f_k \searrow 0$ (monoton!) für $k \to \infty$ und alle $x \in X$. Dann konvergiert $\|f_k|\,C(X,\mathbb{R})\| \to 0$ für $k \to \infty$.