Prof. Dr. Hans-Jürgen Schmeisser / Henning Kempka

Übungen zur Vorlesung Höhere Analysis (Funktionalanalysis I)

Blatt 5 Abgabe der mit * gekennzeichneten Aufgaben zum 24.11.2006

Aufgabe 1: c_0

Beweisen Sie, dass

$$\bigcup_{p<\infty} \ell_p \subsetneqq c_0 \ .$$

Aufgabe 2: Konvergenz in ℓ_p

(a) Sei $1 \leq p \leq \infty$ und $x^n \to x$ in ℓ_p. Zeigen Sie, dass $(x^n)_k \to x_k$ für jedes $k \in \mathbb{N}$.

(b) Geben Sie eine Folge $\{x^n\}_{n=1}^{\infty} \subset \ell_\infty$ an, so dass $(x^n)_k \to x_k$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ aber x^n konvergiert in keinem ℓ_p, $1 \leq p \leq \infty$.

Aufgabe 3*: Räume holomorpher Funktionen

Welcher Satz der Funktionentheorie steckt hinter der Vollständigkeit des Raumes H^∞ aller beschränkten holomorphen Funktionen von $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ nach $\mathbb{C}$ ausgetstattet mit der Supremumsnorm? Die sogenannte Diskalgebra $A(\mathbb{D})$ ist der Teilraum aller Funktionen aus H^∞, die sich auch noch stetig auf den Rand $\partial\mathbb{D}$ fortsetzen lassen. Warum ist $A(\mathbb{D})$ ein Banachraum?

Aufgabe 4: Bernstein-Polynome

Für $f \in C([0,1])$ definieren wir

$$B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x) f\left(\frac{k}{n}\right), \quad p_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \ .$$

Beweisen Sie, dass $B_n(f,x)$ gleichmäßig gegen f konvergiert.
Hinweis:

(i) Zeigen Sie zuerst, dass

$$B_n(1,x) = 1, \quad B_n(x,x) = x, \quad B_n(x^2,x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n} \ .$$

(ii) Es gilt für jedes $0 \leq x \leq 1$

$$\sum_{\left\{k : \left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \delta\right\}} p_{n,k}(x) \leq \frac{1}{\delta^2} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 p_{n,k}(x) \leq \frac{1}{4n\delta^2} \ .$$

(iii) Benutzen Sie folgende Abschätzung und gleichmäßige Stetigkeit von f.

$$\begin{aligned} |B_n(f,x) - f(x)| &= \left| \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x) f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \\ &\leq \sum_{\left\{k : \left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \delta\right\}} p_{n,k}(x) \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| + \sum_{\left\{k : \left|\frac{k}{n} - x\right| < \delta\right\}} p_{n,k}(x) \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \end{aligned}$$

Aufgabe 5*: Periodische Funktionen

Sei $\mathbb{T} = [0, 2\pi)$ und $d(x,y) = \min(|x-y|, |x-y+2\pi|, |x-y-2\pi|)$ für $x, y \in \mathbb{T}$. Beweisen Sie, dass $\mathbb{T}$ ein kompakter metrischer Raum ist und konstruieren Sie eine isometrische Abbildung I zwischen dem Raum $C(\mathbb{T})$ und dem Raum $C_{per}(\mathbb{R})$ der 2π-periodischen stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$. In welchem Sinne gilt $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$? Wie kann man $\mathbb{T}^n$ definieren?