Prof. Dr. Hans-Jürgen Schmeisser / Henning Kempka

# ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG HÖHERE ANALYSIS (FUNKTIONALANALYSIS I)

Blatt 6 — Abgabe der mit * gekennzeichneten Aufgaben zum 01.12.2006

Aufgabe 1*: $\boldsymbol{C^1([0,1])}$

Für $f \in C^1([0,1])$ setzt man

$$||f||_1 = |f(0)| + ||f'|C([0,1])||,$$

$$||f||_2 = \max\left\{\left|\int_0^1 f(x)\underset{\cdot}{\mathrm{x}}\right|, \left\| f' \right| C([0,1])\right\|\right\} \ ,$$

$$||f||_3 = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 + \int_0^1 |f'(x)|^2 \underset{\cdot}{\mathrm{x}}\right)^{\frac{1}{2}} \ .$$

Zeigen Sie:

(a) $||\cdot||_j$ ist jeweils eine Norm auf $C^1([0,1])$, $j = 1,2,3$.

(b) Welche $||\cdot||_j$ sind äquivalent zu $||f|C^1([0,1])|| = ||f|C([0,1])|| + ||f'|C([0,1])||$?

Hinweis: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

Aufgabe 2:

Geben Sie eine beschränkte Folge ohne eine konvergente Teilfolge in den Banachräumen $C([0,1])$ und $L_p([0,1]), 1 \le p \le \infty$, an!

Aufgabe 3*: **Integration in $\mathbb{R}^n$**

Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $1 \le p \le \infty$ und $f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{||x||^\alpha (\log ||x||)^\beta}$ gilt

$$f_{\alpha,\beta} \in L_p(K_0(1)) \ , \qquad f_{\alpha,\beta} \in L_p(\mathbb{R}^n \setminus K_0(1))?$$

Aufgabe 4: $\boldsymbol{L_p}$

(a) Beweisen Sie, dass

$$1 \le p \le \infty, f \in L_p(\mathbb{R}) \not\Longrightarrow \lim_{|x|\to\infty} f(x) \to 0 \quad \text{und}$$

$$\bigcap_{p<\infty} L_p([0,1]) \supsetneqq L_\infty([0,1]) \qquad \text{gilt.}$$

(b) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ meßbar und $1 \le p_1 < p < p_2 \le \infty$. Beweisen Sie, dass

$$L_{p_1}(\Omega) \cap L_{p_2}(\Omega) \subset L_p(\Omega) \quad \text{und} \quad \| f | \, L_p(\Omega)\| \le \| f | \, L_{p_1}(\Omega)\|^\alpha \cdot \| f | \, L_{p_2}(\Omega)\|^{1-\alpha} \ ,$$

wobei $\alpha \in (0,1)$, $\frac{1}{p} = \frac{\alpha}{p_1} + \frac{1-\alpha}{p_2}$.

(c)

$$\lim_{p\to\infty} \| f | \, L_p([0,1])\| = \| f | \, L_\infty([0,1])\| \ .$$

Aufgabe 5: **Duale Räume**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ meßbar, $f$ meßbar auf $\Omega$, $1 \le p, p' \le \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ und $M \ge 0$.

(a) Falls für alle $g \in L_{p'}(\Omega)$ die Funktion $fg$ integrierbar ist und

$$\left|\int_\Omega fg\right| \le M \left\| g | \, L_{p'}(\Omega)\right\|$$

erfüllt, dann ist $f \in L_p(\Omega)$ und $\| f | \, L_p(\Omega)\| \le M$.

(b) Beweisen Sie, dass

$$\| f | \, L_p(\Omega)\| = \sup_{\| g | L_{p'}(\Omega)\|=1} \left|\int_\Omega fg\right| \ .$$