ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG HÖHERE ANALYSIS (FUNKTIONALANALYSIS I)

Blatt 6 — Abgabe der mit * gekennzeichneten Aufgaben zum 01.12.2006

Aufgabe 1*: $C^1([0,1])$

Für $f \in C^1([0,1])$ setzt man

$$\begin{aligned} ||f||_1 &= |f(0)| + ||f'|C([0,1])||, \\ ||f||_2 &= \max\left\{ \left| \int_0^1 f(x)\underset{\cdot}{\mathrm{x}} \right|, \left\| f' \right| C([0,1]) \right\| \right\} , \\ ||f||_3 &= \left(\int_0^1 |f(x)|^2 + \int_0^1 |f'(x)|^2 \underset{\cdot}{\mathrm{x}} \right)^{\frac{1}{2}} . \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

(a) $|| \cdot ||_j$ ist jeweils eine Norm auf $C^1([0,1])$, $j = 1,2,3$.
(b) Welche $|| \cdot ||_j$ sind äquivalent zu $||f|C^1([0,1])|| = ||f|C([0,1])|| + ||f'|C([0,1])||$?

Hinweis: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

Aufgabe 2:

Geben Sie eine beschränkte Folge ohne eine konvergente Teilfolge in den Banachräumen $C([0,1])$ und $L_p([0,1]), 1 \le p \le \infty$, an!

Aufgabe 3*: Integration in $\mathbb{R}^n$

Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $1 \le p \le \infty$ und $f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{||x||^\alpha (\log ||x||)^\beta}$ gilt

$$f_{\alpha,\beta} \in L_p(K_0(1)) , \qquad f_{\alpha,\beta} \in L_p(\mathbb{R}^n \setminus K_0(1))?$$

Aufgabe 4: L_p

(a) Beweisen Sie, dass

$$1 \le p \le \infty, f \in L_p(\mathbb{R}) \not\Longrightarrow \lim_{|x|\to\infty} f(x) \to 0 \quad \text{und}$$

$$\bigcap_{p<\infty} L_p([0,1]) \supsetneqq L_\infty([0,1]) \qquad \text{gilt.}$$

(b) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ meßbar und $1 \le p_1 < p < p_2 \le \infty$. Beweisen Sie, dass

$$L_{p_1}(\Omega) \cap L_{p_2}(\Omega) \subset L_p(\Omega) \quad \text{und} \quad \| f | L_p(\Omega)\| \le \| f | L_{p_1}(\Omega)\|^\alpha \cdot \| f | L_{p_2}(\Omega)\|^{1-\alpha} ,$$

wobei $\alpha \in (0,1)$, $\frac{1}{p} = \frac{\alpha}{p_1} + \frac{1-\alpha}{p_2}$.

(c)

$$\lim_{p\to\infty} \| f | L_p([0,1])\| = \| f | L_\infty([0,1])\| .$$

Aufgabe 5: Duale Räume

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ meßbar, f meßbar auf Ω, $1 \le p, p' \le \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ und $M \ge 0$.

(a) Falls für alle $g \in L_{p'}(\Omega)$ die Funktion fg integrierbar ist und

$$\left| \int_\Omega fg \right| \le M \left\| g \right| L_{p'}(\Omega) \right\|$$

erfüllt, dann ist $f \in L_p(\Omega)$ und $\| f | L_p(\Omega)\| \le M$.

(b) Beweisen Sie, dass

$$\| f | L_p(\Omega)\| = \sup_{\| g | L_{p'}(\Omega)\| = 1} \left| \int_\Omega fg \right| .$$