Prof. Dr. Hans-Jürgen Schmeisser / Henning Kempka

Übungen zur Vorlesung Höhere Analysis (Funktionalanalysis I)

Blatt 7 — Abgabe der mit * gekennzeichneten Aufgaben zum 8.12.2006

Aufgabe 1*: **Faltung**

(a) Berechnen Sie $\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} * \chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}$ und $\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} * \chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} * \chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}$.

(b) Berechnen Sie $e^{-\frac{x^2}{2}} * e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Aufgabe 2: **Youngsche Ungleichung**

Sei $1 \leq p, q, r \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$. Sei $f \in L_p$ und $g \in L_q$. Zeigen Sie, dass $f * g \in L_r$ und

$$\| f * g | L_r \| \leq \| f | L_p \| \, \| g | L_q \| \ .$$

Aufgabe 3: **Banachsche Algebren**

Sei $(\mathcal{A}, || \cdot ||_{\mathcal{A}})$ ein Banachraum und $(x, y) \to x \cdot y$ eine bilineare assoziative Abbildung von $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ nach $\mathcal{A}$ mit

$$||x \cdot y||_{\mathcal{A}} \leq ||x||_{\mathcal{A}} \cdot ||y||_{\mathcal{A}}, \quad \forall x, y \in \mathcal{A} \ .$$

Dann heißt $\mathcal{A}$ eine *Banachalgebra.* Ein Element $e \in \mathcal{A}$ mit $e \cdot x = x \cdot e = x$ für alle $x \in \mathcal{A}$ und $||e||_{\mathcal{A}} = 1$ heißt *Einheit.* Zeigen Sie, dass folgende Räume Banachalgebren sind:

(a) $C([0,1]), L_\infty([0,1]), A(\mathbb{D}), H^\infty$ mit Supremumsnorm und punktweiser Multiplikation.

(b) $L_1(\mathbb{R})$ mit $f \cdot g = f * g$.

(c) $\ell_p(\mathbb{Z}) = \{x = \{x_k\}_{k=-\infty}^{\infty} : ||x||_p = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} < \infty\}$ mit $1 \leq p < \infty$ und $(x \cdot y)_k = x_k y_k$.

(d) $\ell_1(\mathbb{Z})$ mit $(x \cdot y)_k = (x * y)_k = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n y_{k-n}$.

(e) (v) *Wieneralgebra* $W = \{f \in C(\mathbb{T}) : \{c_n(f)\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell_1(\mathbb{Z})\}$, wobei $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$ die Fourierkoeffizienten von f sind. Die Multiplikation wird punktweise definiert und die Norm durch $||f||_W = ||c(f)|\ell_1(\mathbb{Z})||$.

Welche diese Banachalgebren besitzen eine Einheit? Zeigen Sie, dass W und $\ell_1(\mathbb{Z})$ isometrisch-isomorph sind.

Aufgabe 4*: **Approximierende Einheiten**

Eine Familie $\{K_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subset L_1(\mathbb{R}^n)$ heiße zulässig, wenn gilt

(K1) $\int_{\mathbb{R}^n} |K_\varepsilon(x)| \, \mathrm{d}x \leq C < \infty$ für alle $\varepsilon > 0$,

(K2) $\int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(x) \, \mathrm{d}x = 1$ für alle $\varepsilon > 0$,

(K1) $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|x|>\delta} |K_\varepsilon(x)| \, \mathrm{d}x = 0$ für alle $\delta > 0$.

Beweisen Sie

(i) Wenn $K \in L_1(\mathbb{R}^n)$, mit $\int_{\mathbb{R}^n} K(x) \, \mathrm{d}x = 1$, dann ist $\{K_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} = \{\varepsilon^{-n} K\big(\frac{x}{\varepsilon}\big)\}_{\varepsilon>0}$ zulässig.

(ii) Sei $\{K_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ zulässig und $f \in L_p(\mathbb{R}^n), 1 \leq p < \infty$. Dann gilt

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} ||K_\varepsilon * f - f||_p = 0 \ .$$

Aufgabe 5: **Präkompaktheit in $L_p(\mathbb{R}^n)$**

Sei $M \subset L_p(\mathbb{R}^n), 1 \leq p < \infty$. Zeigen Sie, dass M präkompakt ist, falls gilt

(P1) $\sup_M ||f||_p < \infty$,

(P1) $\lim_{|h|\to 0^+} \sup_M ||f(\cdot + h) - f(\cdot)||_p = 0$,

(P1) $\lim_{R\to\infty} \sup_M ||f|L_p(\mathbb{R}^n \setminus K_R(0))|| = 0$.