Prof. Dr. Hans-Jürgen Schmeisser / Henning Kempka

Übungen zur Vorlesung Höhere Analysis (Funktionalanalysis I)

Blatt 8 — Abgabe der mit * gekennzeichneten Aufgaben zum 15.12.2006

Aufgabe 1*:

Sei E und F Banachräume und A eine Abbildung von E nach F. Zeigen Sie, dass $A \in Ł(E, F)$ genau dann wenn A stetig und additiv ist (d.h. $A(x + y) = Ax + Ay$ für alle $x, y \in E$).

Aufgabe 2:

Sei $A = (a_{k,l})_{k,l=1}^{\infty}$ eine unendliche Matrix mit

$$m_1 = \sup_{l\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{k,l}| < \infty, \quad m_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{l=1}^{\infty} |a_{k,l}| < \infty$$

und $x = (x_l)_{l=1}^{\infty} \in \ell_p$, $1 \le p \le \infty$. Man setzt

$$(Ax)_k := \sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l} x_l, \quad k \in \mathbb{N} .$$

Zeigen Sie, dass

(a) $A \in Ł(\ell_p, \ell_p)$,
(b) $||A|\ell_1 \to \ell_1|| = m_1$ und $||A|\ell_\infty \to \ell_\infty|| = m_\infty$
(c) $||A|\ell_p \to \ell_p|| \le m_1^{1/p} m_\infty^{1-1/p}$

Aufgabe 3:

In welchem Sinne gelten folgende Aussagen?

(a) $(\ell_1)' = \ell_\infty$,
(b) $c_0' = \ell_1$,
(c) $c' = \ell_1$.

Aufgabe 4:

Sind folgende Funktionale auf dem Banachraum X linear und beschränkt? Finden Sie ihre Normen!

(a) $F : \{x_n\} \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n^2}$, $X = c_0$,
(b) $F : f \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} f\left(\frac{1}{n}\right)$, $X = C([-1, 1])$,
(c) $F : f \to \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(t^n)dt$, $X = C([0, 1])$,
(d)* $F : f \to \int_0^1 t^{-\frac{1}{5}} f(t)dt$, $X = L_2([0, 1])$,
(e) $F : f \to \int_0^1 f(t^2)dt, X = L_2([0, 1])$.

Aufgabe 5:

Sind folgende Operatoren linear und beschränkt? Finden Sie ihre Normen!

(a) $F : L_2([0, 1]) \to L_2([0, 1]), (Ff)(t) = f(t^3)$,
(b) $F : C([0, 1]) \to C([0, 1]), (Ff)(t) = f(t^3)$,
(c)* $F : \ell_2 \to \ell_2, Fx = (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots)$,
(d) $F : C([0, 1]) \to C([0, 1]), (Ff)(x) = f(x)g(x), g \in C([0, 1])$,
(e) $F : L_p(\mathbb{R}) \to L_p(\mathbb{R}), (Ff) = f * g, g \in L_1(\mathbb{R})$.